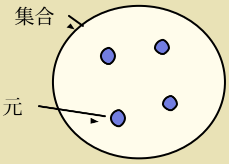
計算の理論 I
―数学的概念と記法―

月曜３校時
大月 美佳

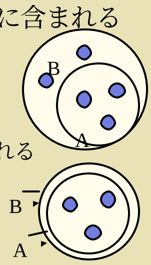
集合
(1.2節 pp. 6～8)

- 集合(set)
  - なんらかの対象をいくつか(重複なしに)集めたもの
- 元(member)
  - 集められた対象



部分集合、真部分集合

- AがBの部分集合＝AがBに含まれる
  - := AのすべてのAの元がBの元
- 真部分集合 A⊊B
  - := A⊆BかつA≠B
  - Aのすべての元はBに含まれる
  - Aの元でないBの元がある
- A⊆BかつA⊇B = A＝B



集合の記述法

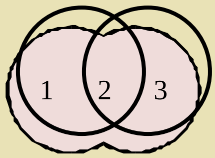
- 元を列挙する
  - { 0, 1 } { dog, cat }
- 元が満たす条件を記述する
  - { x|P(x) }
    - := 「P(x)が真であるようなxの集合」
- 元が所属する集合も書く
  - { x∈A|P(x) }
    - := 「P(x)が真であるようなAの元xの集合」
    - = { x|P(x)かつx∈A }

集合の演算（の一部）

1. 和 (union) : A∪B
2. 共通部分 (intersection) : A∩B
3. 差 (difference) : A－B
4. 直積 (Cartesian product) : A×B
5. ベキ集合 (power set) : 2^A

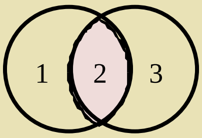
和 (union)

- A∪B
  - = { x|xはAまたはBの元である }
- 例
  - A={ 1, 2 }
  - B={ 2, 3 }
  - A∪B={ 1, 2, 3 }



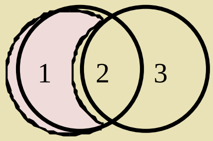
共通部分 (intersection)

- $A \cap B$
  = { x|xはAの元かつBの元 }
- 例
  A={ 1, 2 }
  B={ 2, 3 }
  $A \cap B$={ 2 }



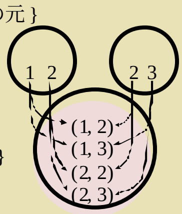
差 (difference)

- $A - B$
  = { x|xはAの元でBの元ではない }
- 例
  A={ 1, 2 }
  B={ 2, 3 }
  $A - B$={ 1 }



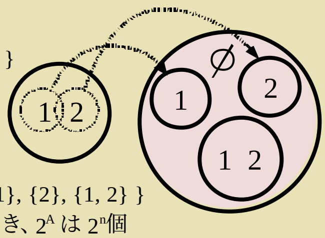
直積 (Cartesian product)

- $A \times B$
  = { (x, y)|xはAの元でyはBの元 }
- 例
  A={ 1, 2 }
  B={ 2, 3 }
  $A - B$
  ={ (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) }
  Aがn個でBがm個のとき、
  $A \times B$はnm個



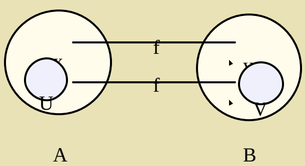
ベキ集合 (power set)

- 2^A
  = { B|B⊆A }
- 例
  A={ 1, 2 }
  2^A ={ ∅, {1}, {2}, {1, 2} }
  Aがn個のとき、2^A は 2^n個



写像 (projection?)

- 線形代数
  写像f : f(x)={y}, f(U)=V



濃度 (cardinality)

- 等しい濃度
  := 集合S_1とS_2について、S_1からS_2の上へ1対1の写像がある
- 有限集合
  $S_1 \subsetneq S_2$ならば異なる濃度
- 無限集合
  $S_1 \subsetneq S_2$でも等しい濃度の場合がある

真部分集合な無限集合
（等しい濃度）

- 例
  - S_1:偶数全体
  - S_2:整数全体

1対1写像→f(2i)=i

S_1	-∞	…	-2	0	2	…	2i	…	∞
	↓		↓	↓	↓		↓		↓
S_2	-∞	…	-1	0	1	…	i	…	∞

真部分集合な無限集合
（異なる濃度）

- 例
  - S1:整数全体
  - S2:実数全体

1対1写像→f(2i)=i

- 証明

対角線論法(diagonalization)

正しくないことを示したい命題P

1. Pを正しいと仮定
2. 仮定から例を導き出す
3. 2の例がPを満たさないことを示す

証明例
(p. 8)

1. S_1(整数全体)とS_2(実数全体)が1対1対応していると仮定
2. 例として次のような数を考える

   「各i=1, 2, 3, … について、第 i 番目の実数（1の対応で正整数iに対応づけられた実数）の小数点以下i桁目の数字に、法 10のもとで5を加えた数字が、小数点以下i桁目であるような実数」
3. これは1を満たさない

x_1	=	x_{10}	.	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	…	$x_{1\infty}$
x_2	=	x_{20}	.	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	…	$x_{2\infty}$
x_3	=	x_{30}	.	x_{31}	x_{32}	…	x_{3i}	…	$x_{3\infty}$
:		:		:	:		:		:
x_i	=	x_{i0}	.	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ii}	…	$x_{i\infty}$
:		:		:	:		:		:
x_∞	=	$x_{\infty 0}$	.	$x_{\infty 1}$	$x_{\infty 2}$	…	$x_{\infty i}$	…	$x_{\infty\infty}$
y	=	y_0	.	x_{11} +0.5	x_{22} +0.05		x_{ii} +5×10^{-i}		$x_{\infty\infty}$ +5×$10^{-\infty}$

可算無限

- 可算無限 (countably many)

  = 加算(countable)

  := 正整数と1対1に対応づけられる集合
- 例
  - ○ 有理数の集合
  - ○ 空でないアルファベットΣ上の（有限長の）記号列の集合Σ*
  - × Σ*のベキ集合
  - × 整数から{ 0, 1 }への関数の集合

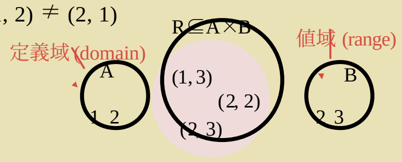
  「実数の集合と同じ濃度を持つ」

関係

- (2項)関係 (binary relation)

  :=順序対の集合
- 順序対（順序がある対(pair, 組)）

  (1, 2) ≠ (2, 1)



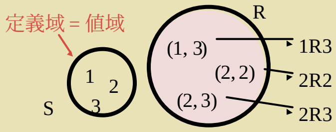
Sの上の関係

✍Sの上の関係 (relation on S)

定義域と値域が同じ集合Sである場合の関係

✍aRb

:= (a, b)が関係Rに属する



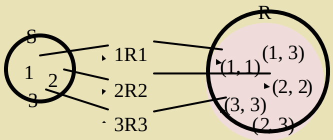
関係の性質

1. 反射的 (reflexive)
2. 非反射的 (irreflexive)
3. 推移的 (transitive)
4. 対称的 (symmetric)
5. 非対称的 (asymmetric)

反射的

✍反射的 (reflexive)

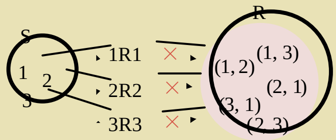
:= Sの各元aについてaRa



非反射的

✍非反射的 (irreflexive)

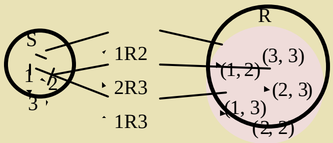
:= Sの各元aについてaRaが成り立たない



推移的

✍推移的 (transitive)

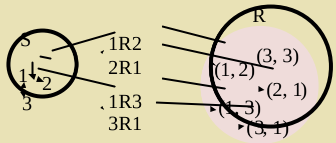
:= aRbかつbRcのとき常にaRc



対称的

✍対称的 (symmetric)

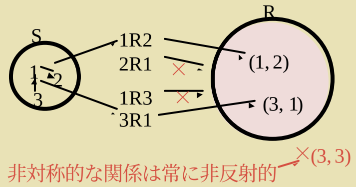
:= aRbのとき常にbRa



非対称的

- 非対称的 (asymmetric)

  := aRbのときbRaが決して成り立たない



関係の性質の例

(例1.3 p. 9)

- 整数上の大小関係＜
  - 推移的

    a<bかつb<cならばa<c
  - 非対称的

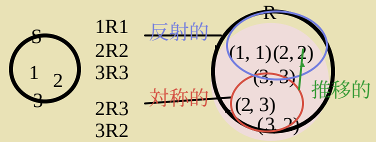
    a<bならばb<aには決してならない

    したがって非反射的でもある

同値関係

- 同値関係 (equivalence relation)

  := 反射的、対称的、かつ推移的である関係



同値類

- 同値類 (equivalence class)

  := 次の性質を持つ部分集合S_i

  1. $S_i \neq$○, かつi≠jならば$S_i \cap S_j =$○
  2. S_iの各元a, bに対してaRb
  3. i≠jのときS_iの各元aとS_jの各元bに対して aRbは成り立たない
- SはS_iの和∪S_iとして表される

同値関係の例

(例1.4 pp. 9〜10)

- 法mに関する合同 (congruence module m)

  := i-jがmで割り切れること

  := i≡$_m$j または i≡j mod m

  反射的：任意のaについてa-aはmで割り切れる

  推移的：a≡$_m$bかつb≡$_m$cならば、a≡$_m$c

  a=m×x+b, b= m×y+c → a=m×(x+y)+c

  対称的：a≡$_m$bならばb≡$_m$a

  a-b=m×x → b-a=m×(-x)

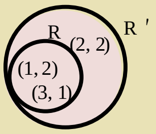
整数全体の≡$_m$による同値類

		…	-1	0	1	2	…	
0	{	…	-m,	0,	m,	2m,	…	}
1	{	…	-m+1,	1,	m+1,	2m+1,	…	}
			:	:	:	:		
m-1	{	…	-1,	m-1,	2m-1,	3m-1,	…	}

m個

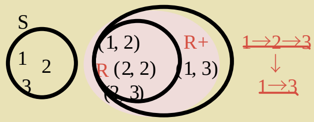
関係の閉包

- R のG 閉包 (G - closure)
  - G :関係に関するいくつかの性質の集まり
  - ある関係Rを部分集合として含み、
  - かつGのすべての性質を有する最小の関係R ′



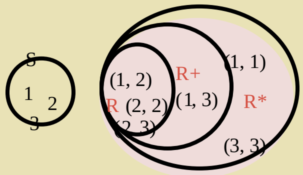
推移的閉包

- 推移的閉包 (transitive closure)
  - Rを含む最小の推移関係R+
    1. (a, b)がRの元ならば、(a, b)はR+の元
    2. (a, b)がR+の元で(b, c)がRの元ならば(a, c)はR+の元
    3. 1と2で示したもの以外はR+の元はない



反射的かつ推移的閉包

- Rの反射的かつ推移的閉包:R*
  - = R+∪ { (a, a)|a∈S }

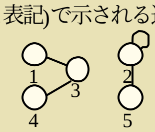


グラフ
(1.2節 pp. 2〜5)

- どんなときに使うのか？
  - 状態遷移図
  - 文法木
  - 各種アルゴリズムのデータ構造
  - その他いろいろ

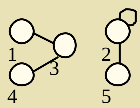
グラフの定義

- グラフ G=(V, E)
  - V: 有限個の頂点(vertex, node)の集合
  - E: 頂点の対((v_1, v_2) と表記)で示される辺(edge)の集合
- 例　図1.1 p.3)
  - V={1, 2, 3, 4, 5}
  - E={(n, m)|n+m=4 または、n+m=7}



道

- 道 (path)、路
  - グラフのある頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (k≧1)が道であるというのは、
  - $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$がいずれも辺であるということ
- 閉路 (cycle) : $v_1=v_k$のとき
- 道の例　図1.1 p.3)
  - 1, 3, 4
  - 2
  - 2, 5



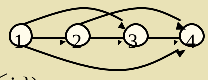
有向グラフ

- 有向グラフ (directed graph, digraph) G
  - G=(V, E)
  - Eの要素が有向辺(arc)
  - v→w : vからwへ向かう有向辺

前者 (predecessor)　後者 (successor)

- 例 (図1.2 p.3)

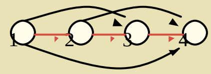
({ 1, 2, 3, 4 }, { i→j|i＜j })



有向グラフの道

- 有向グラフの道 (path)

:= v_i→v_i+1 (1≦i＜k) が有向辺であるような頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (ただし、k≧1)



- 例 (図1.2 p.3)

1→2→3→4 : 1から4への道

木

- 木 (tree, ordered directed tree)

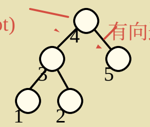
次の性質を持つ有効グラフ

1. 前者を持たず、各頂点への道が必ず存在する根 (root)と呼ばれる頂点を一つ持つ
2. 根以外の頂点はそれぞれただ一つ前者を持つ
3. 各頂点の後者は左から右へ一列に順序つけられている

木の書き方

- 根を上に、各有向辺を下に向けて書く
- 有向辺の矢印は書く必要がない
- 頂点は（なんらかの）順序に従って左から右に書く

根 (root)　有向辺 (arc)



木特有の用語

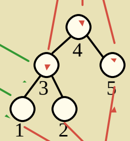
- 親 (parent, father?) : 前者
- 子 (child, son?) : 後者
- 葉 (leaf) : 子を持たない頂点
- 内部 (interior) 頂点 : 葉でない頂点
- 先祖 (ancestor) と子孫 (descendant)
  - 頂点v_1からv_2への道があるとき(v_1:先祖、v_2:子孫)
  - 各頂点は自分自身の先祖かつ子孫

内部頂点

親

子

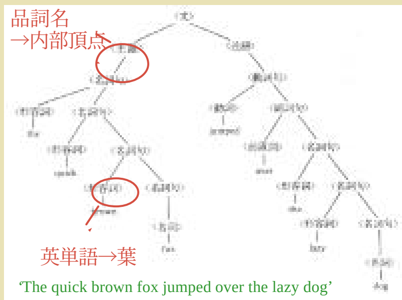
葉



構文木
(例1.3 p.4)

品詞名→内部頂点

英単語→葉



'The quick brown fox jumped over the lazy dog'

帰納法
(1.3節 p. 5～6)

- 各種証明に使用
- 手順
  1. 基底(basis)
     P(0)を示す
  2. 帰納的ステップ
     P(n-1)を仮定したときP(n)となることを示す

帰納法の仮定

帰納法の例
(例1.1 p. 5)

- $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

帰納法での証明

- 基底

  P(0) : $\sum_{i=0}^{0} i^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$

  $0 = 0$

帰納法での証明（続き1）

- 帰納的ステップ
  - 帰納法の仮定

    $$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}$$

  - 仮定からnのとき成り立つことを導く

    $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n^2$ を利用する

帰納法での証明（続き2）

- 仮定からの導出

$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ 仮定

$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2$

$= \frac{(n-1)n(2n-1)+6n^2}{6} = \frac{n(2n^2-3n+1+6n)}{6}$

$\therefore \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

記号・記号列

- 記号
  :=定義なし
  例）a, b, c, …, 1, 2, …
- 記号列 (string)＝語(word)
  :=記号を有限個並べてできる列
  例）abc, cba, a1, 2c
- |w|
  :=記号列wの長さ(length)
  例）abcbの長さ＝|abcb|＝4
- 空列＝ ε
  – :=長さが0(|ε|＝0)の記号列

接頭語・接尾語

- 接頭語(prefix)
  :=記号列(w)の先頭文字列（長さは0～|w|）
  例）abcの接頭語＝{ ε, a, ab, abc }
- 接尾語(postfix)
  :=記号列(w)の末尾文字列（長さは0～|w|）
  例）abcの接尾語＝{ ε, c, bc, abc }

真の（proper)接頭語／接尾語

記号列の連接

- 連接(concatenation)
  - := 2つの記号列をつなぐ演算
  - 例) dogとhouseの連接＝doghouse
- 演算記号
  - なし
  - 記号列wとxの連接＝wx
- 単位元＝ ε
  - εw=wε=w

アルファベットと言語

- アルファベット(alphabet)
  - :=空ではない記号の有限集合
  - 例) {q, z, 1} {0}
  - (×) 空集合、無限個の記号の集合
- 言語(language, formal language)
  - アルファベットに属する記号からなる列の集合
  - 例) 空集合、{ ε }

言語

- ○ アルファベット{0,1}上の回文(palindrome)
  - 要素は無限個
  - ε, 0, 1, 00, 11, 010, 11011, …
- × 「無限個の記号」の上の有限個の回文
  - アルファベット（記号が有限）上ではない
- ○ アルファベットΣ上の全ての記号列の集合＝Σ*
  - Σ={a}のとき、Σ*={ ε, a, aa, aaa, …}
  - Σ={0, 1}のとき、Σ*={ ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, …}