計算の理論 I

ー言語とオートマトンー

月曜３校時
大月 美佳

前回のテストについて
推移的閉包 1)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 順序対はひっくり返せない
  - (5, 4) ≠ (4, 5)
- 推移的 :2つの順序対から1つの順序
  - (1, 2) (2, 3)⇒(1, 3) ○
  - (1, 2) (2, 3) (3, 4)⇒(1, 4) ×

前回のテストについて
推移的閉包 2)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 増えた分についてもチェックが必要
  - R+ 増加分 { (1, 3), (2, 4) }
  - (1, 3) (3, 4)⇒(1, 4)
- 閉包は元の関係を中に含む
  - 増えた分だけではダメ

  R+ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
  (1, 3), (2, 4), (1, 4) }

前回のテストについて
推移的かつ反射的閉包 1)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- S(定義域と値域)は何？
  - { 1, 2, 3, 4, 5 }
- 閉包は元の関係を中に含む

  R* = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
  (1, 3), (2, 4), (1, 4)
  (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) }

前回のテストについて
対称的閉包 1)

G-閉包R ' の定義 (p. 10から類推)

1. Rの元はすべてR ' の元である
2. Rの元との間にGの性質があるR ' の元がある
3. 1と2以外にR ' の元はない

→ 対称的閉包

1. Rの元はすべてR ' の元である
2. Rの元と対称的であるR ' の元がある
3. 1と2以外にR ' の元はない

前回のテストについて
対称的閉包 2)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 1から、

  R_1= { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }
- 2から、

  R_2= { (2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 5) }

∴ R ' = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 5) }

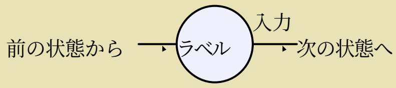
その他コメント

- 解けなくて白紙で出す場合にはコメントを
- コメントはできれば具体的に（私も）
- 教科書は読んでおきましょう
- 法mに関する合同は今のところそう重要ではありません
- 聞こえにくい人がいる（喋り方に問題がある）のはごめんなさい
- 掲示板はまだです（休みあけ？）

有限状態系

- 状態(state)って何？
  - 受け付け可能な入力（離散）
  - 可能な前後の状態

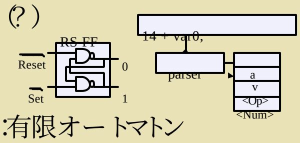
  などの記憶（内部構成）



- 状態が有限個→有限状態系

有限状態系の例

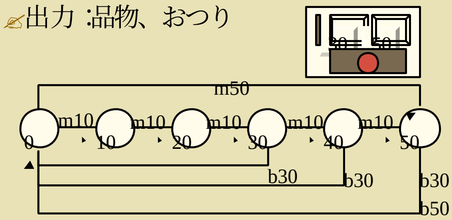
- スイッチング回路
- 語彙解析部 （コンパイラ、テキストエディタ)
- 計算機そのもの（?→無限の容量）
- 人間の脳（?）



⇒モデル化：有限オートマトン

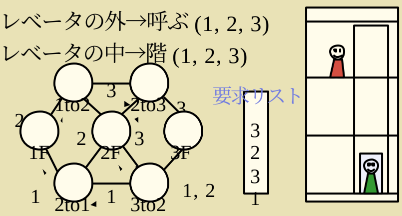
自動販売機

- 入力：お金(m10, m50)、ボタン(b30, b50)
- 出力：品物、おつり



エレベータ

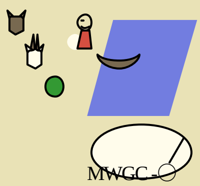
- 入力
  - エレベータの外→呼ぶ (1, 2, 3)
  - エレベータの中→階 (1, 2, 3)



教科書の例１

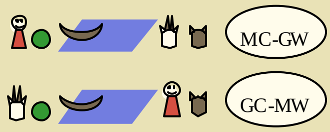
(p. 19)

- 入力＝人間の取る行動
  - 一人で(m)
  - 狼と(w)
  - 山羊と(g)
  - キャベツと(c)



教科書の例 2

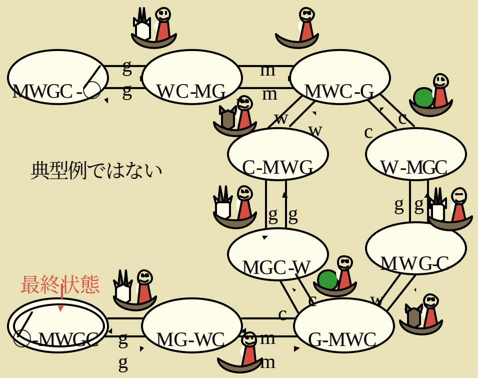
- あってはならない組み合わせ
  - 狼と山羊 (W G-MC, MC-WG)
  - 山羊とキャベツ (GC-MW, MW-GC)



教科書の例 3

- あっても良い組み合わせ
  - 山羊と人間、狼とキャベツ (MG-WC, WC-MG)
  - キャベツだけ (C-MGW, MGW -C)
  - 狼だけ (W-MGC, MGC-W)
  - 山羊だけ (G-MWC, MWC-G)
  - みんな一緒 (MWGC-∅, ∅-MWGC)

最終状態（受理状態）



ここから定義開始

- 記号列
- アルファベット
- 言語
- オートマトン

なぜ数学的定義？
×あいまい→〇正確さ
×不安定→〇確実性
当たらない直感→危険
（コンピュータは教えられたとおりにしかやれないから）

記号・記号列

- 記号
  :=定義なし
  例）a, b, c, …, 1, 2, …
- 記号列 (string)＝語(word)
  :=記号を有限個並べてできる列
  例）abc, cba, a1, 2c
- |w|
  :=記号列wの長さ(length)
  例）abcbの長さ＝|abcb|＝4
- 空列＝ ε
  - :=長さが0(|ε|＝0)の記号列

接頭語・接尾語

- 接頭語(prefix)
  :=記号列(w)の先頭文字列（長さは0～|w|）
  例）abcの接頭語＝{ ε, a, ab, abc }
- 接尾語(postfix)
  :=記号列(w)の末尾文字列（長さは0～|w|）
  例）abcの接尾語＝{ ε, c, bc, abc }

真の（proper)接頭語／接尾語

記号列の連接

- 連接(concatenation)
  - := 2つの記号列をつなぐ演算
  - 例) dogとhouseの連接＝doghouse
- 演算記号
  - なし
  - 記号列wとxの連接＝wx
- 単位元＝ ε
  - εw=wε=w

アルファベットと言語

- アルファベット(alphabet)
  - :=空ではない記号の有限集合
  - 例) {q, z, 1} {0}
  - (×) 空集合、無限個の記号の集合
- 言語(language, formal language)
  - アルファベットに属する記号からなる列の集合
  - 例) 空集合、{ ε }

言語

○ アルファベット{0,1}上の回文(palindrome)

要素は無限個

ε, 0, 1, 00, 11, 010, 11011, …

× 「無限個の記号」の上の有限個の回文

アルファベット (記号が有限) 上ではない

○ アルファベットΣ上の全ての記号列の集合＝Σ*

Σ={a}のとき、Σ*={ ε, a, aa, aaa, …}

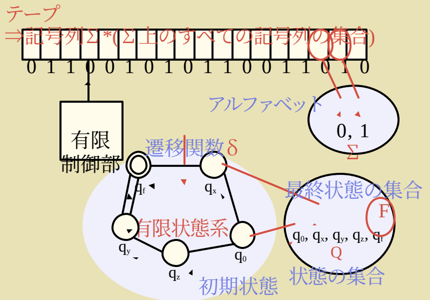
Σ={0, 1}のとき、Σ*={ ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, …}

有限オートマトン

- 有限オートマトン(finite automaton, FA)
  - 有限個の状態の集合 Q
  - (有限の)入力アルファベットΣ
  - 入力記号によって引き起こされる状態遷移
    - 遷移関数δ: Q×ΣからQへの写像
  - 初期状態 $q_0 \in Q$
  - 最終状態の集合 F⊆Q

→ **M = (Q, Σ, δ, q_0, F)**

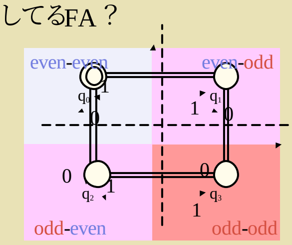
FAの模式図



FAの例 1

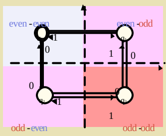
(p.21 図2.2)

- 何をしてるFA？



FAの例 2

(図2.2の定義式)



- M=(Q, Σ, δ, q_0, F)
  - Q = { q_0, q_1, q_2, q_3 }
  - Σ = { 0, 1 }
  - F = { q_0 }
  - δ(q, a)→

入力 : a

状態 : q

	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

入力記号列への拡張

- ?̂: Q× Σ* からQへの関数
  1. ?̂(q, ?) ? q
     → 入力がないときはFAの状態は変化しない
  2. 任意の列 w と記号 a に対して
     ?̂(q, wa) ? ?(?̂(q, w), a)
     → wが入力された状態からaが入力されて遷移する状態がwaが入力された状態

?̂ ? ?

?̂(q, a) ? ?(?̂(q, ?), a) ? ?(q, a)

受理

- 入力列xを有限オートマトンMで受理する
  → M = (Q, Σ, δ, q_0, F)のとき δ(q_0, x) ∈F
- 受理言語
  → L(M) = { x| δ(q_0, x)∈F }
- 正則集合（正則）
  → ある言語が有限オートマトンの受理言語であること（部分集合でなく全体）

FAの例 3

(図2.2の受理言語)

- L(M) : 受理言語＝正則集合

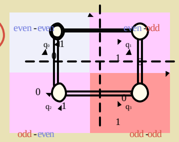
＝0と1がそれぞれ偶数個含まれた列の集合

例：110101

δ(q_0, 1)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,

δ(q_0, 0)→ q_2, δ(q_2, 1)→ q_3,

δ(q_3, 0)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,



レポート課題

- 有限状態系の例としてあげた自動販売機を以下のように変更する
  - おつりを出さずに残して繰り越すこととする
  - 100円を投入できるようにする
  - 保持できる金額はお100円までとする
    （100円を超えて投入されてもそのまま戻り、状態に変化は起こらない）

レポート課題（つづき）

- 課題
  1. 状態遷移図を書け
  2. 有限オートマトンとして定義式を書け
     状態の集合、初期状態、アルファベット、遷移関数、最終状態の集合を明示すること
  3. 2のオートマトンが受理する記号列の例を5つ示せ
- 提出情報
  - 期日 5/7 講義終了時に回収
  - 提出形態 今回は紙