計算の理論 I

－ DFAとNFAの等価性 －

月曜３校時
大月 美佳

連絡事項

- 履修届
  - 2名ほど未登録：98S349、99S304
  - 16日までに要確認
- 自転車
  - 玄関前には置かないように
  - 自転車置き場拡大
    →DC棟側の歩道

今日の講義内容

1. レポートについて
   1. 状態遷移図に関する留意点
   2. 定義式に関する留意点
2. 前回のミニテストについて
   1. 記号列
   2. DFAの遷移関数
3. 今日の新しいこと
   1. DFAとNFAの等価性（ε動作は次回）

レポートの採点について

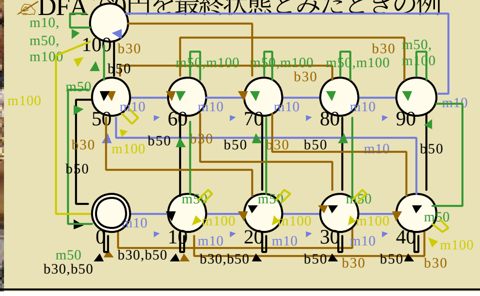
- オートマトンがどんなものかということの理解が主題
- ので、おおまかに合っていれば可
- 今後はここであげる留意点に注意

1-1 状態遷移図の留意点

- 自己への遷移(DFA)か遷移なし(NFA)か
  - 100円を超える投入
    例：70円の状態で50円追加
  - 代金オーバー
    例：10円の状態で30円の商品を要求
- 最終状態を何にすべきか
  - オートマトンの機能を決めるのは人間
  - 解は一つではない
  - 自動販売機としては中途半端（押し売り?!）

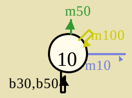
状態遷移図

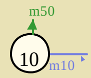
- DFAで0円を最終状態とみたときの例



1-2 定義式に関する留意点

- 遷移関数の書き方
  - 自己への遷移(DFA)か遷移無し(NFA)か





	m10	m50	m100	b30	b50
10	20	60	10	10	10

	m10	m50	m100	b30	b50
10	{20}	{60}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

定義式の解答例

- 状態の集合 Q
  = { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 }
- 入力アルファベット Σ
  = { m10, m50, m100, b30, b50 }
- 初期状態 q_0
  = 0
- 最終状態の集合 F
  = { 0 } ＊これに限らない

定義式の解答例 つづき

- 遷移関数 δ
  - DFA
  - 自己への遷移
    - 100を超える投入
    - 代金オーバー
  - NFAでは？

	m10	m50	m100	b30	b50
0	10	50	100	0	0
10	20	60	10	10	10
20	30	70	20	20	20
30	40	80	30	0	30
40	50	90	40	10	40
50	60	100	50	20	0
60	70	60	60	30	10
70	80	70	70	40	20
80	90	80	80	50	30
90	100	90	90	60	40
100	100	100	100	70	50

書き間違えてました
（これが正解）

このDFAが受理する記号列

- 最終状態の集合を何にしたかに依存
  - その最終状態のどれかに到達する記号列
  - 上の例では 0 一つが最終状態
    1. m10, m10, m10, b30
    2. m50, b50
    3. m100, b50, b50
    4. m100, b50, b30, m10, b30
    5. m50, b30, m10, b30

2-1 記号列
（ミニテストから）

- 以下の定義を思い出せ
  - 記号列、記号列wの長さ|w|、空列 ε
  - 連接、連接の単位元
- 定義から、
  - 空列 ε の長さ| ε |=0
  - wε = w

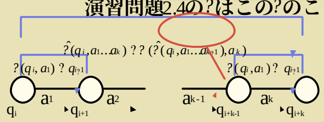
長さ0の文字列(= ε)を0と書かないで欲しい
…(;_;)

2-2 DFAの遷移関数
（ミニテストから）

- P. 23の δ の拡張定義に注意
  1. ?̂(q,?) ? q
  2. 任意の列wと記号aに対して

     ?̂(q, wa) ? ? (?̂(q, w), a)

演習問題2.4の?はこの?̂のこと



遷移関数と帰納法

- この定義でのw
  - 長さ0(ε)から
  - 右向きに任意の記号aを１つずつ増加させて
  - 無限の長さまで

⇒wの長さ|w|に関しての段階的な定義

⇒帰納法と親和性が高い

ミニテストの解答

与式： $?(q,xy)\ ?\ ?(?(q,x),y)$**を示す。**

1) $|y|?\ 0$**つまり** $y\ ?\ ?$**であるとき、**

(左辺) $?\ ?(q,x?)\ ?\ ?(q,x)$

?は連接の単位元

(右辺) $?\ ?(?(q,x),?)\ ?\ ?(q,x)$

遷移関数の定義 1より

(左辺) ? (右辺)であるので成立。

ミニテストの解答 つづき

2) $|y|?\ k\ ?\ 1$**つまり** $y\ ?\ a_1...a_{k?1}$**であるとき**

$?(q,xa_1...a_{k?1})\ ?\ ?(?(q,x),a_1..a_{k?1})$**が成り立つとする。**

$|y|?\ k$**つまり** $y\ ?\ a_1..a_k$**であるとき、**

(左辺) $?\ ?(q,xa_1..a_k)$

$?\ ?(?(q,xa_1..a_{k?1}),a_k)$ **遷移関数の定義 2より**

$?\ ?(?((q,x),a_1...a_{k?1}),a_k)$ **仮定より**

$?\ ?(?(q,x),a_1..a_k)\ ?$ **(右辺) 遷移関数の定義 2より**

(左辺) ? (右辺)であるので成立。

1)2)より与式は示された。

閑話休題

- 難しかった模様 :問題の本質を掴め
  - 試行錯誤とパターンマッチ
    - 解法自体は試行錯誤で発見
    - 問題に解法が合うかはパターンマッチ
    - 世の中で大事なのは解の見つかってない問題
- 空調と席は大丈夫？
- 面白そうなもの
  - 形式言語実装用Javaライブラリ
    - http://www.swiftinc.co.jp/fllj/

3 今日の新しいこと

- 等価性

  等価(equivalent)である

  =受理集合が同じ

  受理集合＝受理言語＝正則集合

- DFA とNFA は実は等価

  ホント？

DFAとNFAの等価性

- DFA とNFAが等価
  1. DFAで受理できる集合はすべて何らかのNFAで受理できる

     ⇒ DFAは特殊なNFA (簡単)
  2. NFAで受理できる集合はすべて何らかのDFAで受理できる

     ⇒ NFAがDFAで模倣できることを示さなくてはいけない(難しい!)

DFAとNFAの等価性 1

- DFAはNFAとして書くことができる
  (遷移関数だけの違い)

DFA

	a_0	…	a_n
q_0	q_x	…	q_z
:	:		:
q_k	q_y	…	q_w

NFA

	a_0	…	a_n
q_0	$\{q_x\}$	…	$\{q_z\}$
:	:		:
q_k	$\{q_y\}$	…	$\{q_w\}$

要素数1の集合

DFAとNFAの等価性 2

- NFAをDFAで模倣する
  ⇒ 定理2.1 (p.29)
  Lを非決定性有限オートマトンで受理される集合とする。そのとき、Lを受理する決定性の有限オートマトンが存在する。

定理2.1の証明 前準備1

- $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  ＝言語Lを受理するNFA
- $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$
  M′での一つの状態＝Mの状態の部分集合
  Q'?? 2^Q (Qのベキ集合)

	a_n
$\{q_k, \ldots, q_n\}$	$\{q_x, \ldots, q_y\}$

一つの入力に対して
Mが取り得る状態の集合

q′＝M′での一つの状態
$[q_x, \ldots, q_y]$と表記⇒$q'_0=[q_0]$

定理2.1の証明前準備2

- $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$のF′
  Q′のうちMの最終状態を1個以上含むもの

	a_0	…	a_n
$\{q_0\}$	$\{q_k, q_{f1}\}$	…	$\{q_x\}$
:	:		:
$\{q_k\}$	$\{q_y\}$	…	$\{q_0, q_{f1}, q_{f2}\}$
:	:		:
$\{q_0, q_k\}$	$\{q_v, q_w, q_x\}$	…	$\{q_k, q_{f2}\}$

例：$F=\{q_{f1}, q_{f2}\}$

定理2.1の証明前準備3

- $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$の$\delta'$

? $(\{q_1, q_2, \ldots, q_i\}, a)$? $\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$

のとき、かつそのときに限り、

? ?$([q_1, q_2, \ldots, q_i], a)$? $[p_1, p_2, \ldots, p_j]$

とおく。すなわち、

Q?**の元**$[q_1, q_2, \ldots, q_i]$**に**? ?**を適用した結果**?$([q_1, q_2, \ldots, q_i], a)$**は、**
Q**の元**$q_1, q_2, \ldots, q_i$**にそれぞれ**?**を適用した結果**
? (q_1, a), ? (q_2, a), …, ? (q_i, a)**の和集合。**

定理2.1の証明 帰納法1

入力列xに対して、

? ?$(q_0$?$, x)$? $[q_1, q_2, \ldots, q_j]$?　?(q_0, x) ? $\{q_1, q_2, \ldots, q_j\}$

であることをxの長さに関する帰納法で示す。

1) $|x|$? 0**つまり**x ? ?**であるとき、**

? ?$(q_0$?$, ?)$? q_0? ? $[q_0]$?　?$(q_0, ?)$? $\{q_0\}$

定理2.1の証明 帰納法2

2) $|x| ?\ m$ であるとき与式は成り立っているとする。
ここで $m ? 1$ の長さの記号列を $xa(a ? ?)$ とする。
$? ?(q_0?, xa) ? ? ?(? ?(q_0?, x), a) = ? ?([p_1, p_2, \ldots, p_j], a)$
ここで? の定義より、
$? ?([p_1, p_2, \ldots, p_j], a) ? [r_1, r_2, \ldots, r_k]$
$?\ \ ?(\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}, a) ? \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$
また帰納法の仮定から、
$? ?(q_0?, x) ? [p_1, p_2, \ldots, p_j] ?\ \ ?(q_0, x) ? \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$
$? ? ?(q_0?, xa) ? [r_1, r_2, \ldots, r_k] ?\ \ ?(q_0, xa) ? \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$
? 1)2)より、与式は成り立つ。

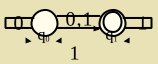
定理2.1の証明 受理

受理 : = $? ?(q_0?, x)$ が $F?$ に含まれる
先ほどの証明から、
$? ?(q_0?, x) ? [p_1, p_2, \ldots, p_j] ?\ \ ?(q_0, x) ? \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$
ここで $F?$ の定義より、
$? ?(q_0?, x)$ が $F?$ に含まれる ＝ $[p_1, p_2, \ldots, p_j]$ が $F?$ に含まれる
$?\ \ \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$ が F を含む ＝ $?(q_0, x)$ が F を含む

$?\ \ L(M) ? L(M?)$

NFAと等価なDFAの例
(p. 31 例2.5)

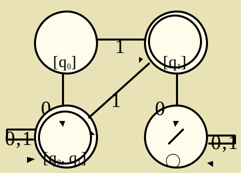
$NFA : M\ ?\ (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, ?, q_0, \{q_1\})$
とする。なお遷移関数 ? は、
$?(q_0, 0) ? \{q_0, q_1\}, ?(q_0, 1) ? \{q_1\}$
$?(q_1, 0) ? \emptyset, ?(q_1, 1) ? \{q_0, q_1\}$



L(M)を受理するDFA

$DFA : M? ?\ (Q, \{0,1\}, ??, [q_0], F)$
$Q\ ?\ \{[q_0], [q_1], [q_0, q_1], \emptyset\}\ ?\ 2^{\{q_0, q_1\}}$
$? ?([q_0], 0)\ ?\ [q_0, q_1], ? ?([q_0], 1)\ ?\ [q_1]$
$? ?([q_1], 0)\ ?\ \emptyset, ? ?([q_1], 1)\ ?\ [q_0, q_1]$
$? ?([q_0, q_1], 0)\ ?\ ?(q_0, 0)\ ?\ ?(q_1, 0)\ ?\ [q_0, q_1]$
$? ?([q_0, q_1], 1)\ ?\ ?(q_0, 1)\ ?\ ?(q_1, 1)\ ?\ [q_0, q_1]$
$? ?(\emptyset, 0)\ ?\ ? ?(\emptyset, 0)\ ?\ \emptyset$
$F\ ?\ \{[q_1], [q_0, q_1]\}$

M´の遷移図



Mで受理する記号列をM´で受理できるか？
試してみよう)
〇 0, 1, 01, 010
× 10, 100, 101

ミニテスト

- ミニテスト
  - 演習問題 2.9のa
  - 教科書・資料を見ても良い
- 資料、ミニテストがない人は前へ
- 提出したら帰って良し