計算の理論 I

－ ε-動作を含むNFA －

月曜３校時
大月 美佳

連絡事項 その1

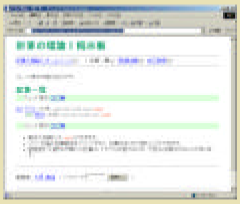
- 前回の解答の間違いについて

	m10	m50	m100	b30	b50
0	10	50	100	0	0
10	20	60	10	10	10
20	30	70	20	20	20
30	40	80	30	0	30
40	50	90	40	10	40
50	60	100	50	20	0
60	70	60	60	30	10
70	80	70	70	40	20
80	90	80	80	50	30
90	100	90	90	60	40
100	100	100	100	70	50

書き間違えてました
（これが正解）

連絡事項 その2

- 質問掲示板を（ようやく）設置しました。
- http://www.cs.is.saga-u.ac.jp/lecture/automaton/sylpheed/



今日の講義内容

1. 前回のミニテストと補足事項
   1. ミニテストの解答例
   2. 補題
2. 今日の新しいこと
   1. ε-動作を含むNFA
   2. ε-CLOSURE
   3. ε-動作を含むNFAと含まないNFAの等価性

NFAと等価なDFA

NFA: M (Q, Σ, δ, q_0, F)

→ DFA: M′(Q′, Σ, δ′, q′$_0$, F′)

	a_0		a_n
q_0	P_{00}	…	P_{0n}
:	:	δ	:
q_k	P_{k0}	…	P_{kn}

→

	a_0		a_n
[q_0]	[P_{00}]	…	[P_{0n}]
:	:		:
[q_k]	[P_{k0}]	…	[P_{kn}]
:	:	δ′	:
[q_0, q_1]	[P_{00}∪P_{10}]	…	[P_{0n}∪P_{1n}]
:	:		:
[q_0, …, q_k]	[P_{00}∪…∪P_{k0}]	…	[P_{0n}∪…∪P_{kn}]

P_{ij}:状態q_iのとき入力a_jに対して遷移しうる状態の集合（Qの部分集合）

NFAと等価なDFA つづき

NFA: のF→ DFAのF′の求め方

F={q_k}

→ F′={[q_k], [q_0,q_k], …, [q_0,…, q_k,…, q_n]}

F={q_j, q_k}

→ F′={[q_j], [q_k], …, [q_0,…, q_j,…, q_k,…, q_n]}

Q′の中でFのどれかの要素を含むもの

Q´とF´の求め方 (ミニテスト:総当り)

NFA: M ({p, q, r, s}, {0, 1}, δ$_1$, p, {s})

→ DFA: M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)

Q´＝Qのベキ集合　部分集合の集合）

＝{ ∅,

[p], [q], [r], [s], ← $_4C_1$個

[p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s], ← $_4C_2$個

[p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], ← $_4C_3$個

[p, q, r, s] } ← $_4C_4$個

F´

δ´の求め方 (ミニテスト：総当り)

δ$_1$

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

	0	1
-	-	-
[p]	[p, q]	[p]
[q]	[r]	[r]
[r]	[s]	-
[s]	[s]	[s]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r]	[r, s]	[r]
[q, s]	[r, s]	[r, s]
[r, s]	[s]	[s]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r, s]	[r, s]	[r, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

きちんと書くと (ミニテスト：総当り)

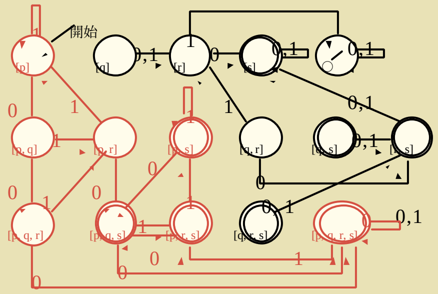
Q´＝{ ∅, [p], [q], [r], [s], [p, q], [p, r],
[p, s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

Σ＝{0, 1}

q´$_0$＝[p]

F´＝{ [s], [p, s], [q, s], [r, s], [p, q, s],
[p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

総当りでは無駄が多い ＝q´$_0$([p])からの道がない状態を含む



δ´とQ´とF´を求める (ミニテスト：最小)

δ

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

開始

	0	1
[p]	[p, q]	[p]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

F´

Q´

きちんと書くと (ミニテスト：最小)

Q´＝{ [p], [p, q], [p, r], [p, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

Σ＝{0, 1}

q´$_0$＝[p]

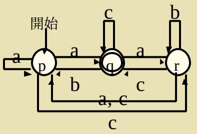
F´＝{ [p, s], [p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

補題

NFA: M ({p, q, r}, {a, b, c}, δ, p, {q})
と等価なDFAを求める。

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q



δ′とQ′とF′を求める
(補題 :最小)

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q

→

δ′

	a	b	c
[p]	[p, q]	-	[r]
[r]	[p]	[r]	[p, q]
[p, q]	[p, q, r]	[p]	[q, r]
[q, r]	[p, r]	[p, r]	[p, q]
[p, r]	[p, q]	[r]	[p, q, r]
[p, q, r]	[p, q, r]	[p, r]	[p, q, r]
-	-	-	-

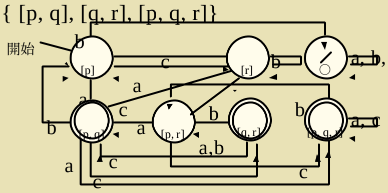
開始

F′

Q′

きちんと書くと
(補題 :最小)

Q′= { ○, [p], [r], [p, r], [p, q], [q, r], [p, q, r]}
Σ={a, b, c}
q_0′=[p]
F′= { [p, q], [q, r], [p, q, r]}



今日の新しいこと

- ε -動作を含むNFA
  - 正則表現とのつなぎとして
- ε -CLOSURE
  - ε -動作を含むNFAと含まないNFAの等価性を示すため
- ε -動作を含むNFAと含まないNFAの等価性
  - ε -動作なしNFAでε -動作ありNFAを模倣

ε -動作を含むNFA

- ε -動作を含むNFA
  ＝空入力εによる状態遷移が許されたNFA
- Wがε -動作を含むNFAで受理
  ＝初期状態から最終状態へ至る道がw
  ただし、wに明示的にεは含まれない
- 定義式 M (Q, Σ, δ, q_0, F)
  δ＝Q×(Σ∪{ε})からQのベキ集合への関数
  → δ(q, a)
  ＝状態qからラベルaの遷移で移る先の状態の集合

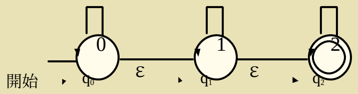
ε -動作を含むNFAの例
(p. 32 図2.8)

受理入力列の例

1. 002→00 ε ε 2
2. 012 →0 ε 1 ε 2
3. 12 → ε 1 ε 2
4. 2 → ε ε 2

δ　Σ∪{ε}

	0	1	2	ε
q_0	{q_0}	○	○	{q_1}
q_1	○	{q_1}	○	{q_2}
q_2	○	○	{q_2}	○



ε -CLOSURE

- ある状態qからε -動作のみで移れる先の状態の集合

  文字列に対する遷移関数 $\hat{?}$ を定義するため
- ε -CLOSUREの定義
  - ε -CLOSURE(q)

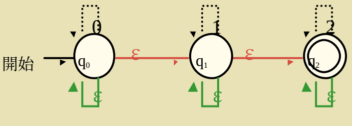
    =遷移図からラベルが ε でない有向辺を取り去った上で、qから到達可能な頂点の集合
  - ε -CLOSURE(P) : P は状態の集合

    = $\bigcup_{q? P}$? ? *CLOSURE*(*q*)

ε -CLOSUREの例

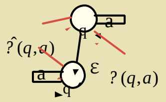
(p. 34 例2.8)

- ε -CLOSURE(q_0)={q_0, q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_1)={q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_2)={q_2}



ラベルが ε である暗黙的な辺
長さ0の辺)

$\hat{?}$の定義



1) $\hat{?}(q,?)$? ? ? *CLOSURE*(*q*)

2) $\hat{?}(q, wa)$? ? ? *CLOSURE*(*P*)

ただし、 *w* ? ? *,*q* ? ? ,

P ? {*p*|ある $\hat{?}(q,w)$の元*r*に対して *p* ? ? (*r*,*a*)}

$\hat{?}(q,a)$は必ずしも ? (*q*,*a*)と等しくない。

qからaをラベルに持つ道（εを含む）を通って到達できる状態の集合

qからaの辺で直接到達できる状態の集合

?と$\hat{?}$の拡張

1) $\hat{?}(q,?)$? ? ? *CLOSURE*(*q*)

2) $\hat{?}(q,wa)$? ? ? *CLOSURE*(*P*)

ただし、*w* ? ? *,*q* ? ? ,

P ? {*p*|ある$\hat{?}(q,w)$の元*r*に対して*r* ? ? (*r*, *a*)}

さらに、状態の集合R(? Q)に対して

3) ? (R, *a*) ? $\bigcup_{q? R}$? (*q*,*a*)

4) $\hat{?}$(R, *w*) ? $\bigcup_{q? R}$ $\hat{?}(q,w)$

ε -動作ありNFAの受理言語

- 定義

  M ? (*Q*,? ,? ,q_0, *F*)が受理する言語は

  {*w* | $\hat{?}(q_0, w)$はFの元を含む}

  でありL(*M*)と書く。

受理の例

(p. 34 例2.8)

1. 0: $\hat{?}(q_0,0)$? ? ? *CLOSURE*(? ($\hat{?}$(q_0, ?),0))

   ? ? ? *CLOSURE*(? ({q_0, q_1, q_2},0))

   ? ? ? *CLOSURE*(? (q_0,0) ? ? (q_1,0) ? ? (q_2,0))

   ? ? ? *CLOSURE*({q_0} ? ○ ? ○)

   ? ? ? *CLOSURE*({q_0}) ? {q_0, q_1, q_2}

2. 01: $\hat{?}(q_0,01)$? ? ? *CLOSURE*(? ($\hat{?}$(q_0,0),1))

   ? ? ? *CLOSURE*(? ({q_0, q_1, q_2},1))

   ? ? ? *CLOSURE*(? (q_0,1) ? ? (q_1,1) ? ? (q_2,1))

   ? ? ? *CLOSURE*(○ ? {q_1} ? ○)

   ? ? ? *CLOSURE*({q_1}) ? {q_1, q_2}

ε -動作なしNFAと ε -動作ありNFAの等価性 (p.34 定理2.2)

ε -動作ありNFA: M (Q, Σ, δ, q_0, F)が
ε -動作なしNFA: M ´(Q, Σ, δ ´, q_0, F ´)
で模倣できる (定理2.2:証明略)。

F ?? ?F ? {q_0}　　? - CLOSUREがFの元を含むとき
　　　?F　　　　　　　そうでないとき

? ?(q,a) ? ?̂(q,a) (q ? Q,a ? ?)

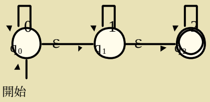
ε -動作ありNFAを模倣する ε -動作なしNFAの例 (p. 36 例2.9)

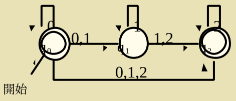
δ

	0	1	2	ε
q_0	{q_0}	○	○	{q_1}
q_1	○	{q_1}	○	{q_2}
q_2	○	○	{q_2}	○

δ ´

	0	1	2
q_0	{q_0, q_1, q_2}	{q_1, q_2}	{q_2}
q_1	○	{q_1, q_2}	{q_2}
q_2	○	○	{q_2}





今日のミニテスト

- ミニテスト
  - 演習問題 2.9のb
  - 教科書 ·資料を見ても良い
- 資料、ミニテストがない人は前へ
- 提出したら帰って良し