

計算の理論 I

ー閉包性ー

月曜3校時
大月 美佳

連絡事項

- ◆ 美化強化の通達
 - ー 講義室
 - ー 玄関前

今日の講義内容

1. 追加事項と前回のミニテスト
 1. 追加事項：正規表現のまとめ方
 2. ミニテスト《演習問題 2.13のb)》の解答例
2. 前回の復習
例3.2 について
3. 今日の新しいこと
閉包性(節3.2 p. 75)
 - 正規表現に対する各種演算のうち閉じてるもの話
 - 和、連接、Kleene閉包、補集合、共通部分、代入、準同型写像、商

まとめ方が難しい？

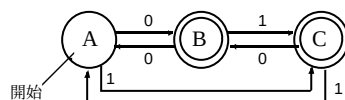
- ◆ 演習問題 2.16 を使う

$r + s = s + r$	$\emptyset^* = e$
$(r + s) + t = r + (s + t)$	$(r^*)^* = r^*$
$(rs)t = r(st)$	$(e + r)^* = r^*$
$r(s + t) = rs + rt$	$(r^*s^*)^* = (r + s)^*$
$(r + s)t = rt + st$	/
	プリントにミス

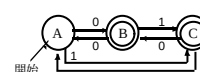
前回のミニテスト

(演習問題 2.13, p. 66)

下の状態図に対応する正規表現を求めよ。
b)



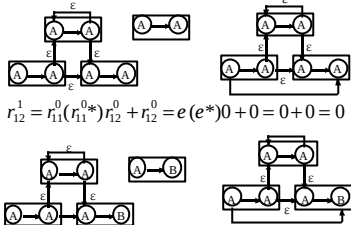
とりあえず番号をつける

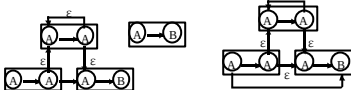


A → 1
B → 2
C → 3

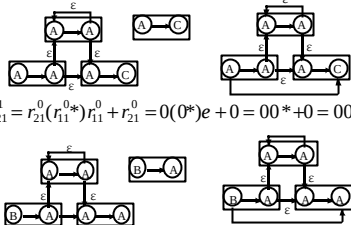
A	A	$r^{11} = e$
A	B	$r^{12} = 0$
A	C	$r^{13} = 1$
B	A	$r^{21} = 0$
B	B	$r^{22} = e$
B	C	$r^{23} = 1$
C	A	$r^{31} = 1$
C	B	$r^{32} = 0$
C	C	$r^{33} = 0$

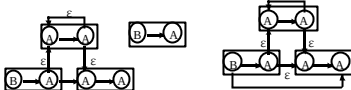
状態Aが加わった
k=1 その1

$$r_{11}^1 = r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{11}^0 = e(e^*)e + e = e$$


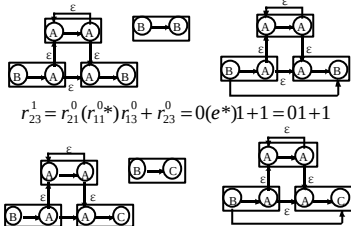
$$r_{12}^1 = r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{12}^0 = e(e^*)0 + 0 = 0 + 0 = 0$$


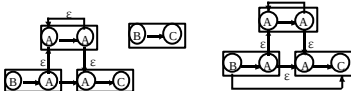
状態Aが加わった
k=1 その2

$$r_{13}^1 = r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{13}^0 = e(e^*)1 + 1 = 1 + 1 = 1$$


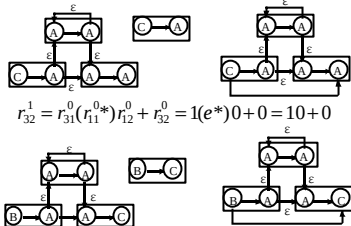
$$r_{21}^1 = r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{21}^0 = 0(0^*)e + 0 = 00^* + 0 = 00^*$$


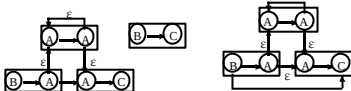
状態Aが加わった
k=1 その3

$$r_{22}^1 = r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{22}^0 = 0(e^*)0 + e = 00 + e$$


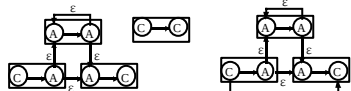
$$r_{23}^1 = r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{23}^0 = 0(e^*)1 + 1 = 01 + 1$$


状態Aが加わった
k=1 その4

$$r_{31}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{31}^0 = 1(e^*)e + 1 = 1 + 1 = 1$$


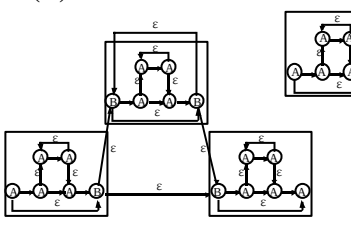
$$r_{32}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{32}^0 = 1(e^*)0 + 0 = 10 + 0$$


状態Aが加わった
k=1 その5

$$r_{33}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{33}^0 = 1(e^*)1 + e = 11 + e$$


$$\begin{matrix} r_{11}^1 = e & r_{21}^1 = 00^* & r_{31}^1 = 1 \\ r_{12}^1 = 0 & r_{22}^1 = 00 + e & r_{32}^1 = 10 + 0 \\ r_{13}^1 = 1 & r_{23}^1 = 01 + 1 & r_{33}^1 = 11 + e \end{matrix}$$

さらに状態Bが加わった
k=2 例1

$$r_{11}^2 = r_{12}^1(r_{22}^{1*})r_{21}^1 + r_{11}^1 = 0((00 + e)^*)00^* + e = 0(00)^*00^* + e$$


どんどん進める

k=2

$$\begin{aligned}
 r_{12}^2 &= r_{11}^1(r_{12}^1)^2 + r_{12}^1 = 0((00+e)^*(00+e) + 0 = 0(00)^* + 0 = 0(00)^* \\
 r_{13}^2 &= r_{11}^1(r_{12}^1)^2 + r_{13}^1 = 0((00+e)^*(01+1) + 1 = 0(00)^*(0+e)1 + 1 \\
 &= 00^*1 + 1 = 0^*1 \\
 r_{21}^2 &= r_{11}^1(r_{21}^1)^2 + r_{21}^1 = (00+e)((00+e)^*(00+e) + 0 = 0(00)^*(00+e) + 0 = 0(00)^* \\
 &= 0(00)^*(00)^* \\
 r_{22}^2 &= r_{11}^1(r_{22}^1)^2 + r_{22}^1 = (00+e)((00+e)^*(00+e) + (00+e) = 0(00)^* \\
 &= 0(00)^*(00+e)^2 + r_{22}^1 = (00+e)((00+e)^*(01+1) + (01+1) \\
 &= ((00)^*(e)(01+1) = 0(00)^*(0+e)1 = 0^*1 \\
 r_{31}^2 &= r_{11}^1(r_{31}^1)^2 + r_{31}^1 = (10+0)((00+e)^*(00+e) + 1 = (10+0)(00)^*(00+e) + 1 \\
 &= (10+0)(00)^*(00+e)^2 + r_{31}^1 = (10+0)((00+e)^*(00+e) + (00+e) + (10+0) \\
 &= (10+0)(00)^*(4e) = (10+0)(00)^* \\
 r_{32}^2 &= r_{11}^1(r_{32}^1)^2 + r_{32}^1 = (10+0)((00+e)^*(01+1) + (1+e) \\
 &= (10+0)(00)^*(0+e)1 + 1 + e = (10+0)0^*1 + 1 + e
 \end{aligned}$$

最終状態への道

k=3

$$\begin{aligned}
 r_{11}^1 &= 0(00)^*(00)^* + e \\
 r_{12}^2 &= 0(00)^* \\
 r_{13}^1 &= 0^*1 \\
 r &= r_{12}^3 + r_{13}^3 \\
 r_{12}^3 &= r_{13}^2(r_{33}^2)^2 + r_{12}^2 \\
 r_{13}^3 &= r_{13}^2(r_{33}^2)^2 + r_{13}^2 \\
 r_{21}^1 &= (00)^*(00)^* \\
 r_{22}^1 &= (00)^* \\
 r_{23}^1 &= 0^*1 \\
 r_{31}^2 &= (10+0)(00)^*(00)^* + 1 \\
 r_{32}^2 &= (10+0)(00)^* \\
 r_{33}^2 &= (10+0)0^*1 + 1 + e
 \end{aligned}$$

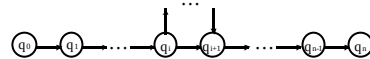
最終解

k=3

$$\begin{aligned}
 r_{12}^2 &= 0(00)^* & r_{32}^2 &= (10+0)(00)^* \\
 r_{13}^1 &= 0^*1 & r_{33}^2 &= (10+0)0^*1 + 1 + e \\
 r_{12}^3 &= 0^*1(((10+0)0^*1 + 1 + e)^*(10+0)(00)^*(00)^* + 0(00)^* \\
 &= 0^*1((10+0)0^*1 + 1 + e)^*(10+0)(00)^*(00)^* + 0(00)^* \\
 &= 0^*1(((10+0)0^*1)^*(11)^*)^*(10+0)(00)^*(00)^* + 0(00)^* \\
 r_{13}^3 &= 0^*1(((10+0)0^*1 + 1 + e)^*(10+0)0^*1 + 1 + e) + 0^*1 \\
 &= 0^*1(((10+0)0^*1 + 1 + e)^*(0^*1)^*)^*(0^*1)^* + 0^*1 \\
 &= 0^*1(((10+0)0^*1)^*(11)^*)^*(0^*1)^* + 0^*1 \\
 r_{12}^3 + r_{13}^3 &= 0(00)^*(00)^* + 0^*1(e + (((10+0)0^*1)^*(11)^*)^*(e + (10+0)(00)^*))
 \end{aligned}$$

前回の補足

- ◆ 例3.2 (p. 74)
- ◆ n は状態数



例3.2

Step 1 調べたい言語 L

- ◆ 1で始まる0と1の列で2進数としてみたとき素数を表すものの集合

◆ 10, 11, 101, 111, 1011...

2 3 5 7 11

Step 2 ~ 4

- 補題の性質をもつnを仮定 $\text{正, } \times p$
- z を次のような記号列とする
2ⁿより大きい素数pの2進表記
- z を $|uv| \leq n$ かつ $|v| \geq 1$ であるようなu, v, w に分解したとする。このu, v, wを2進数としてみたとき、n_u, n_v, n_wとおく。このとき仮定から、

$$p = n_u 2^{|v|+|w|} + n_v 2^{|w|} + n_w$$

Step 5 その1

- ◆ 以下のような素数 q を考えることができる。

$$uv^pw$$

$$q = n_u 2^{p|v|+|w|} + n_v s 2^{|w|} + n_w$$

$$s = 1 + 2^{|v|} + \dots + 2^{(p-1)|v|}$$

- ◆ Fermat の定理 (p. 74にrefあり)

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Step 5 その2

- ◆ 両辺を $|v|$ 乗

$$2^{(p-1)|v|} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$2^{p|v|} \equiv 2^{|v|} \pmod{p}$$

$$\therefore (2^{|v|} - 1)(s - 1) = 2^{p|v|} - 2^{|v|} \equiv 0 \pmod{p}$$

- ◆ $s-1$ が p で割り切れる

$$\therefore 1 \leq |v| \leq n \text{ より } 2 \leq 2^{|v|} \leq 2^n < p$$

割り切れない

Step 5 その3

- ◆ q を p で割ると？

$$q \equiv (n_u 2^{|w|+|v|} + n_v 2^{|w|} + n_v(s-1)2^{|w|} + n_w) \pmod{p}$$

$$q \equiv (n_u 2^{|w|+|v|} + n_v 2^{|w|} + n_w) \pmod{p}$$

$$q \equiv p \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

- ◆ これは q が p でない素数であるという仮定に反するので、 L は正規集合ではない。

今日の新しいこと

1. 正則集合の性質 (第3章, p. 71～)

1. 反復補題 (節3.1, p. 71)

→ある集合が正則でないことを示す

2. 閉包性 (節3.2, p. 75)

→正則表現に対する各種演算が閉じているか

3. 決定手続き (節3.3, p. 81)

→空、有限、無限、等価性

4. Myhill-Nerodeの定理 (節3.4, p. 84)

→最小化

閉包性 (closure property)

- ◆ 閉包性とは？

- ある演算に対して閉じている (ある言語族への演算の結果が同じ言語族に戻る) こと
- 例: 2つの正則集合の和は正則集合

- ◆ 有効的な閉包性

- 具体的な言語族が与えられたときに、実際に結果を求める手続きがあること
- 例: 和の正規表現の導出法は存在

和、連接、Kleene閉包 (p. 76 定理3.1)

定理3.1

正則集の族は和、連接、Kleene閉包の下で閉じている。

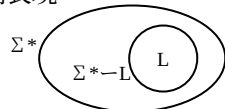
定義より、 $r = s + t$, $r = st$, $r = s^*$

補集合 (p. 76 定理3.2)

定理3.2

正則集合の族は補集合に関して閉じている。

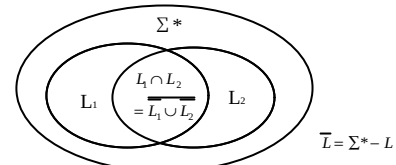
= L が正則集合でかつ $L \subseteq \Sigma^*$ のとき、 $\Sigma^* - L$ も正則表現



共通部分 (p. 76 定理3.3)

定理3.3

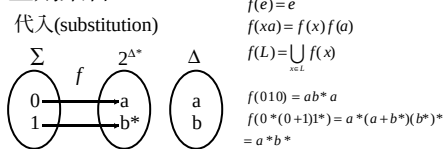
正則集合の族は共通部分に関して閉じている。



代入 (p. 78 定理3.4)

定理 3.4

正則集合の族は代入に関して閉じている
= 正則集合に正則集合を代入した結果は正則集合

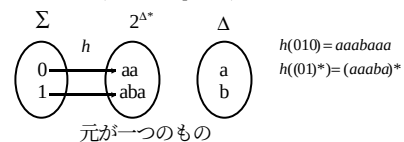


準同型写像 (p. 79 定理3.5)

定理 3.5

正則集合の族は準同型写像およびその逆写像に関して閉じている

準同型写像(homomorphism)

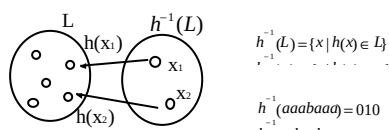


逆準同型写像 (p. 79 定理3.5)

定理 3.5

正則集合の族は準同型写像およびその逆写像に関して閉じている

逆準同型写像(inverse homomorphic image)



言語の商 (p. 81 定理3.6)

定理 3.6

正則集合の、任意の言語による商は正則表現である

有効的閉包性ではない

商(quotient)

例 3.6 (p. 80)

$L = 0^*10^*, L' = 10^*1$ のとき、 $L / L' = \{0\}$



閉じた演算の利用法 (p. 79 例3.5)

ある言語が正則集合でないことを、
既に正則集合でないことが分かっている
言語を変換して求めることで示す。

例 3.5

$$\begin{array}{ll} h_1(a) = a & h_2(a) = 0 \\ h_1(b) = ba & h_2(b) = 1 \\ h_1(c) = a & h_2(c) = 1 \end{array} \quad h_2(h_1^{-1}(\{a^n ba^n \mid n \geq 1\})) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$



今日のミニテスト

- ◆ ミニテスト
 - 演習問題 3.13のa
 - 教科書・資料を見ても良い
- ◆ 資料、ミニテストがない人は前へ
- ◆ 提出したら帰って良し
- ◆ 次回
 - 正則集合の決定性。