計算の理論 I
－決定手続き－

月曜３校時
大月 美佳

連絡事項

- 来週は夏季休業前
  - レポートを出すので欠席しないこと

今日の講義内容

1. 前回の復習とミニテスト
   1. 一部訂正の確認
   2. ミニテスト（演習問題3.13のａ）の解答例
2. 今日の新しいこと
   決定手続き(節3.3, p. 81)
   →空、有限、無限、等価性

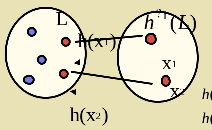
閉包性 (closure property)

- 和、連接、Kleene閉包 (p. 76 定理3.1)
- 補集合 (p. 76 定理3.2)
- 共通部分 (p. 76 定理3.3)
- 代入 (p. 78 定理3.4)
- 準同型写像 (p. 79 定理3.5)
- 逆準同型写像 (p. 79 定理3.5)
- 言語の商 (p. 81 定理3.6)

逆準同型写像 (p. 79 定理3.5)

定理 3.5
正則集合の族は準同型写像およびその逆写像に関して閉じている

逆準同型写像(inverse homomorphic image)



$h^{?1}(L) ? \{x \mid h(x) ? L\}$

$h^{?1}(w) ? \{x \mid h(x) ? w\}$

$h(0) ? aa$ $h^{?1}(aaabaaa) ? 010$

$h(1) ? aba$ $h^{?1}((ab ? ba)*a) ? 1$

逆準同型写像の調べ方

1. 候補となる要素を考える。
2. 候補となる要素に対して準同型写像を適用してみる。
3. 写像のうちLに含まれるものを調べる。
4. 含まれたものの元になった要素を調べる。

$h(0) ? aa$

$h(1) ? aba$

$h((0 ? 1)^*) ? (aa ? aba)^*$

$(aa ? aba)^*$と$(ab ? ba)^*a$の共通部分は$\{aba\}$。

$h^{?1}((ab ? ba)^* a) ? 1$

閉じた演算の利用法
(p. 79 例3.5)

ある言語が正則集合でないことを、
既に正則集合でないことが分かっている
言語を変換して求めることで示す。

例 3.5

$h_1(a) ? a \quad h_2(a) ? 0$

$h_1(b) ? ba \quad h_2(b) ? 1$

$h_1(c) ? a \quad h_2(c) ? 1$

プリントミス

$h_2(h_1^{?1}(\{a^n ba^n \mid n ? 1\}) ? a*bc*) ? \{0^n 1^n \mid n ? 1\}$

ちょっと詳しく

$h_2(h_1^{?1}(\{a\boxed{^n ba^n} \mid n ? 1\}) ? a*bc*) ? \{0^n 1^n \mid n ? 1\}$

$a^n \; ba \; a^{n?1}$

$h_1^{?1}$

$a ? c \quad b \quad a ? c$

$h_1(a) ? a$

$h_1(b) ? ba$

$h_1(c) ? a$

$a^n \; b \; c^{n?1}$

$h_2(a) ? 0$

$h_2(b) ? 1$

$h_2(c) ? 1$

前回のミニテスト
(演習問題 3.13 a, p.94)

h をh(a)=01, h(b)=0である準同型写像
とする

a) $L_1 ? (10 ? 1)*$**のとき**$h^{?1}(L_1)$**を求めよ。**

$h^{?1}(L_1) ? \{x \mid h(x) ? L_1\}$

$h((a ? b)*) ? (01 ? 0)*$

これは ?か0で始まり1が連続 2個以上続かない列の集　合。

一方、(10 ? 1) *は ?か1で始まり0が連続 2個以上続かない
列の集合。つまり、共　通なものは ?のみ。

$? \; h^{?1}(L_1) ? ?$

今日の新しいこと

1. 正則集合の性質（第3章, p. 71～）
   1. 反復補題 (節3.1, p. 71)
      →ある集合が正則でないことを示す
   2. 閉包性 (節3.2, p. 75)
      →正則表現に対する各種演算が閉じているか
   3. 決定手続き (節3.3, p. 81)
      →空、有限、無限、等価性
   4. Myhill-Nerodeの定理 (節3.4, p. 84)
      →最小化

空、有限、無限

定理 3.7 (p. 82)

n個の状態を持つ有限オートマトン Mで
受理される列の集合が、

1) 空でないための必要十分条件は、Mが長さn未満の列を受理することである。
2) 無限であるための必要十分条件は、Mが長さn以上2n-1未満の列を受理することである。

空であるかを調べるためのアルゴリズム

- 与えられたDFAの受理集合が空集合か調べるアルゴリズムの例
  - 遷移図を書く
  - 初期状態から到達不可能な状態を取り除く
  - 最終状態が残っているか調べる
    - 一つでも残っていれば空でない
    - 残っていなかったら空

有限/無限を調べるための アルゴリズム

- DFAが与えられた場合、
  - まず、受理集合が空集合か調べるアルゴリズムのを実施
  - 最終状態でなく最終状態に到達不可能な状態を取り除く
  - 残った遷移図がサイクルを含んでいるか調べる
    - 含んでいたら無限
    - 含んでいなかったら有限

NFAの場合

- 同様のアルゴリズムが使用可
- サイクルのラベルにε以外が含まれることが必要

等価性

定理 3.8 (p. 83)

与えられた2つのオートマトンが等価（すなわち同じ集合を受理する）か否かを調べるアルゴリズムが存在する。

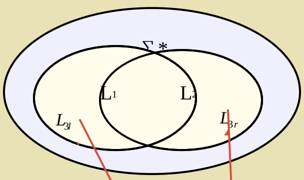
等価であるかを調べる アルゴリズム

- オートマトンM_1とM_2が与えられたとき、
  - それぞれが受理する言語L_1,L_2とする
  - 以下の言語L_3を受理するようなオートマトンM_3を求める

$$L_3 ? (L_1 ? \overline{L_2}) ? (\overline{L_1} ? L_2)$$

  - M_3の受理する集合が空かどうか調べる
    - 空であれば等価
    - 空でなければ等価ではない

式の意味



$\overline{L} ? ?*? L$

$$L_3 ? (L_1 ? \overline{L_2}) ? (\overline{L_1} ? L_2)$$

補集合を受理するDFA の作り方

- 詳しくは定理3.2 (p. 76)

$L ? ?*$

Lを受理するDFA:

$M ? (Q, ?, ?, q_0, F)$としたとき、

$M ?? (Q, ?, ?, q_0, Q ? F)$

が$? * ? L$を受理するDFAとなる。

共通部分を受理するDFAの(直接の)作り方

- 詳しくは定理3.3 (p. 77)

$L_1 ?\ ?*, L_2 ?\ ?*$

を受理する*DFA*をそれぞれ:

$M_1 ? (Q_1, ?, ?_1, q_1, F_1),\quad M_2 ? (Q_2, ?, ?_2, q_2, F_2)$

としたとき、

$M\ ? (Q_1 ? Q_2, ?, ?, (q_1, q_2), F_1 ? F_2)$

$?((p_1, p_2), a) ? (?_1(p_1, a), ?_2(p_2, a))$

$p_1 ?\ Q_1, p_2 ?\ Q_1$

が求める*DFA*となる。

今日のミニテスト

- ミニテスト
  - 演習問題 3.13のc
  - 教科書・資料を見ても良い
- 資料、ミニテストがない人は前へ
- 提出したら帰って良し
- 次回
  - Myhill-Nerodeの定理と最小化
  - レポートを出す