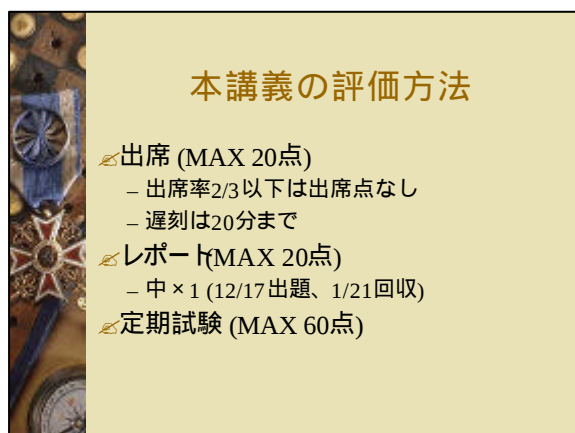
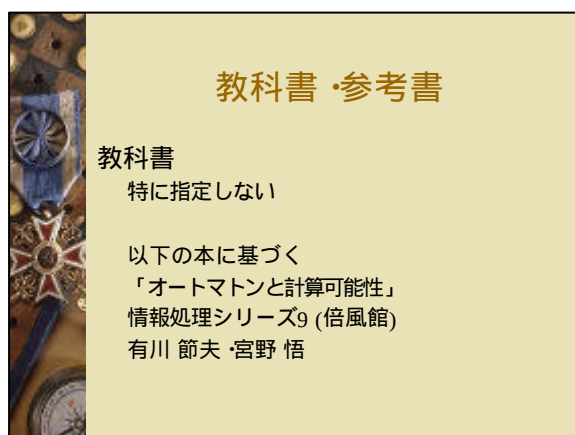
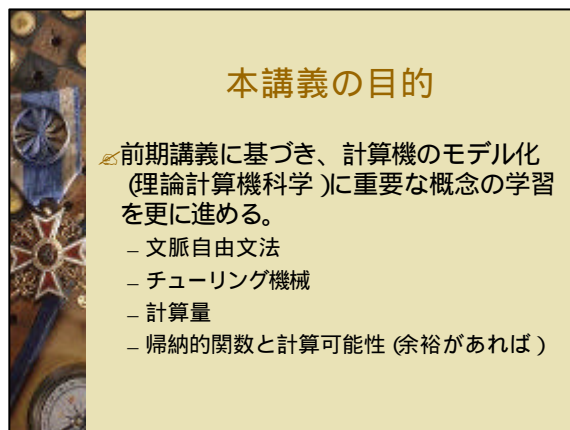




講義スケジュール (予定) 2

回数	日付	内容
9	12/10	多テープチューリング機械と計算量
10	12/17	領域と時間の圧縮関係
冬休み	12/25 ~ 1/7	前後も12/24, 1/14休み (中レポートあり)
11	1/21	言語のクラス -P, NP など-
12	1/28	NP完全性とPSPACE完全性
13	2/4	おわりに -試験について他-
試験	2/18	後期試験

定期試験

- 試験期間
2/12? 2/18
- 再試について
特に行う予定はない

質問などの受付

- 教官室
7号館2階 207号室 (内線 8858)
- 電子メール
mika@is.saga-u.ac.jp
- WWW掲示板
計算の理論I及びII 質問掲示板 (作成予定)
<http://www.cs.is.saga-u.ac.jp/lecture/automaton/>
- レポート提出アドレス
mika@is.saga-u.ac.jp

基本事項確認

- アルファベット、記号、言語
- グラフと木
- 関係と述語
- 新規概念

記号・記号列

- 記号
(例) $a, b, c, \dots, 1, 2, \dots$
- 記号列 (string) = 語 (word)
:= 記号を有限個並べてできる列
(例) $abc, cba, a1, 2c$
- $|w|$
:= 記号列 w の長さ (length)
(例) abc の長さ = $|abc| = 3$
- 空列 = ε
:= 長さが 0 ($|\varepsilon| = 0$) の記号列

記号列の連接

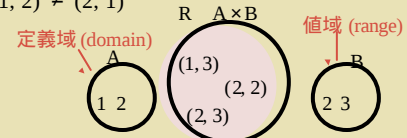
- 連接 (concatenation)
:= 2つの記号列をつなぐ演算
(例) $xlog$ と $house$ の連接 = $doghouse$
- 演算記号
なし (または $\cdot$)
記号列 w と x の連接 = wx (または $w \cdot x$)
- 単位元 = ε
 $\varepsilon w = w \varepsilon = w$

アルファベットと言語

- ✎ アルファベット(alphabet)
:= 空ではない記号の有限集合
(例) $\{q, z, 1\}$ $\{0\}$
($\times$) 空集合、無限個の記号の集合
- ✎ 言語(language, formal language)
アルファベットに属する記号からなる列の集合
(例) 空集合、 $\{\varepsilon\}$

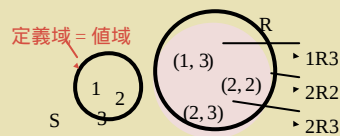
関係

- ✎ (2項)関係 (binary relation)
:= 順序対の集合
- ✎ 順序対 (順序がある対 (pair, 組))
 $(1, 2) \neq (2, 1)$



Sの上の関係

- ✎ Sの上の関係 (relation on S)
定義域と値域が同じ集合Sである場合の関係
- ✎ aRb
:= (a, b) が関係Rに属する

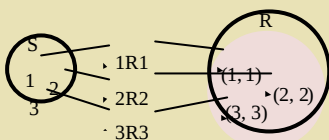


関係の性質

1. 反射的 (reflexive)
2. 非反射的 (irreflexive)
3. 推移的 (transitive)
4. 対称的 (symmetric)
5. 非対称的 (asymmetric)

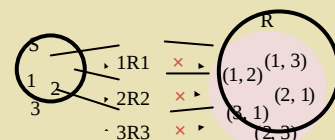
反射的

- ✎ 反射的 (reflexive)
:= Sの各元aについて aRa



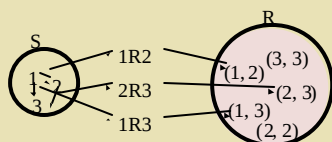
非反射的

- ✎ 非反射的 (irreflexive)
:= Sの各元aについて aRa が成り立たない



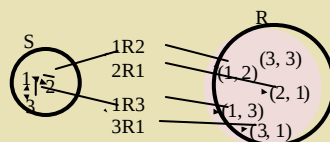
推移的

推移的 (transitive)
 $\text{:= } aRb \text{ かつ } bRc \text{ のとき常に } aRc$



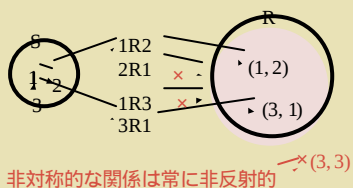
対称的

対称的 (symmetric)
 $\text{:= } aRb \text{ のとき常に } bRa$



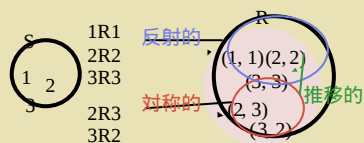
非対称的

非対称的 (asymmetric)
 $\text{:= } aRb \text{ のとき } bRa \text{ が決して成り立たない}$



同値関係

同値関係 (equivalence relation)
 $\text{:= 反射的、対称的、かつ推移的である関係}$

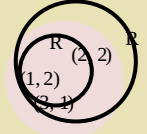


同値類

同値類 (equivalence class)
 $\text{:= 次の性質を持つ部分集合 } S_i$
 1. $S_i \neq \emptyset$, かつ $i \neq j$ ならば $S_i \cap S_j = \emptyset$
 2. S_i の各元 a, b に対して aRb
 3. $i \neq j$ のとき S_i の各元 a と S_j の各元 b に対して aRb は成り立たない
 S は S_i の和 S_i として表される

関係の閉包

R の G 閉包 (G - closure)
 G : 関係に関するいくつかの性質の集まり
 ある関係 R を部分集合として含み、
 かつ G のすべての性質を有する最小の関係 R'



推移的閉包

推移的閉包 (transitive closure)

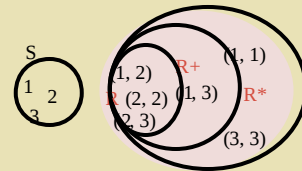
- Rを含む最小の推移関係 R^+
 1. (a, b) がRの元ならば, (a, b) は R^+ の元
 2. (a, b) が R^+ の元で (b, c) がRの元ならば (a, c) は R^+ の元
 3. 1と2で示したものの以外に R^+ の元はない



反射的かつ推移的閉包

Rの反射的かつ推移的閉包: R^*

$$= R^+ \cup \{ (a, a) | a \in S \}$$



グラフ

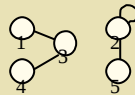
グラフ $G=(V, E)$

- V: 有限個の頂点(vertex, node)の集合
- E: 頂点の対 $((v_1, v_2))$ と表記で示される辺(edge)の集合

例

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(n, m) | n+m=4 \text{ または } n+m=7\}$$



道

道 (path)、路

- グラフのある頂点の列 $v_1, v_2, \dots, v_k$ ($k \geq 1$)が道であるというのは、
- $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ がいずれも辺であるということ

閉路 (cycle) : $v_1=v_k$ のとき

道の例 (図1.1 p.3)

- 1, 3, 4
- 2
- 2, 5



有向グラフ

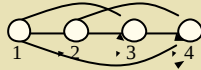
有向グラフ (directed graph, digraph) G

- $G=(V, E)$
- Eの要素が有向辺(arc)
- $v \rightarrow w$ からwへ向かう有向辺

前者 (predecessor) 後者 (successor)

例

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \{i \rightarrow j | i < j\})$$



有向グラフの道

有向グラフの道 (path)

$v_i \rightarrow v_{i+1}$ ($1 \leq i < k$) が有向辺であるような頂点の列 $v_1, v_2, \dots, v_k$ (ただし $k \geq 1$)

例

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$: 1から4への道

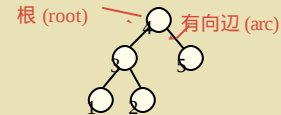


木

- 木 (tree, ordered directed tree)
次の性質を持つ有効グラフ
- 1. 前者を持たず、各頂点への道が必ず存在する根 (root) と呼ばれる頂点を一つ持つ
- 2. 根以外の頂点はそれぞれただ一つ前者を持つ
- 3. 各頂点の後者は左から右へ一列に順序つけられている

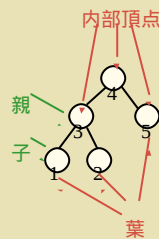
木の書き方

- 根を上、各有向辺を下に向けて書く
- 有向辺の矢印は書く必要がない
- 頂点は (なんらかの) 順序に従って左から右に書く



木特有の用語

- 親 (parent, father?): 前者
- 子 (child, son?): 後者
- 葉 (leaf): 子を持たない頂点
- 内部 (interior) 頂点: 葉でない頂点
- 先祖 (ancestor) と子孫 (descendant)
 - 頂点 v_i から v_j への道があるとき (v_i : 先祖, v_j : 子孫)
 - 各頂点は自分自身の先祖かつ子孫



帰納法

(1.3節 p. 5 ~ 6)

- 各種証明に使用
- 手順
 - 基底 (basis)
 $P(0)$ を示す
 - 帰納的ステップ
 $P(n-1)$ を仮定したとき $P(n)$ となることを示す

帰納法の仮定

帰納法の例

(例 1.1 p. 5)

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

帰納法での証明

基底

$$P(0): \sum_{i=0}^0 i^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0+1)}{6} = 0$$

帰納法での証明 (続き1)

帰納的ステップ

帰納法の仮定

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

仮定から n のとき成り立つことを導く

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n^2$$

を利用する

帰納法での証明 (続き2)

✂ 仮定からの導出

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \geq \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad \leftarrow \text{仮定} \\
 & \sum_{i=0}^n i^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \geq n^2 \geq \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \geq n^2 \\
 & \geq \frac{(n-1)n(2n-1) + 6n^2}{6} \geq \frac{n(2n^2 - 3n + 1 + 6n)}{6} \\
 & \geq \sum_{i=0}^n i^2 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$