計算の理論 II
前期の復習
-有限オートマトン-

月曜4校時
大月美佳

講義の前に

- 前回の大嘘

$L^* ? \overset{?}{\underset{n?0}{?}} L^n ? L^0 ? L^1 ? \ldots ? L^?$

$L ? \{0, 01\}$のとき、

$L^* ? \{?, 0, 01, 00, 001, 010, 0101, \ldots\}$

今日の講義内容

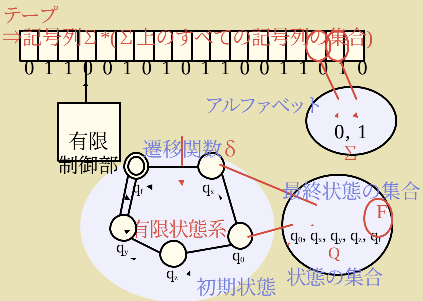
- 有限オートマトンと正規表現
  - (決定性)有限オートマトン
  - 非決定性有限オートマトン
  - ε動作を含む非決定性有限オートマトン
  - 正則表現
- 等価性と変換方法
- 最小化

有限オートマトン

- 有限オートマトン(finite automaton, **FA**)
  - 有限個の状態の集合 Q
  - (有限の)入力アルファベットΣ
  - 入力記号によって引き起こされる状態遷移
    - 遷移関数δ: Q×ΣからQへの写像
  - 初期状態 q_0∈Q
  - 最終状態の集合 F⊆Q

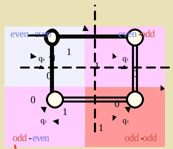
→ **M = (Q, Σ, δ, q_0, F)**

FAの模式図



FAの例

- M=(Q, Σ, δ, q_0, F)
  - Q = { q_0, q_1, q_2, q_3 }
  - Σ = { 0, 1 }
  - F = { q_0 }
  - δ(q, a)→



入力 a

状態 q

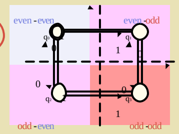
	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

受理

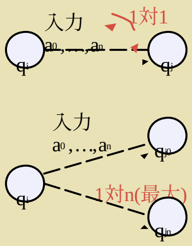
- 入力列xを有限オートマトンMで受理する
  - → M = (Q, Σ, δ, q_0, F)のとき δ(q_0, x) ∈F
- 受理言語
  - → L(M) = { x|δ(q_0, x)∈F }
- 正則集合（正則）
  - → ある言語が有限オートマトンの受理言語であること（部分集合でなく全体）

受理言語の例

- L(M) : 受理言語＝正則集合
  - ＝0と1がそれぞれ偶数個含まれた列の集合
  - 例：110101
    - δ(q_0, 1)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,
    - δ(q_0, 0)→ q_2, δ(q_2, 1)→ q_3,
    - δ(q_3, 0)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,



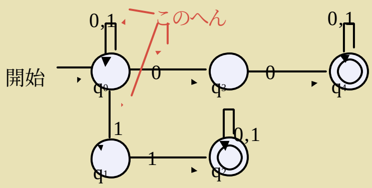
決定性と非決定性



⇒ある記号列に対して道がひとつ決まる
＝**決定性**
(deterministic)

⇒ある記号列に対して道が複数あって決まらない
＝**非決定性**
(nondeterministic)

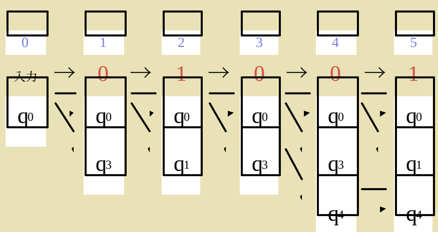
NFAの例



受理される入力列の例
01001, 0101101, 000111

NFAの取りうる状態

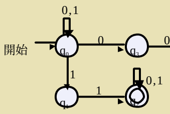
- NFAは同時刻に複数の状態を取りうる



NFAの定義式

- **M = (Q, Σ, δ, q_0, F)**
  - DFAと同じ？→**遷移関数δが違う**
  - **δ :Q×Σ からQのベキ集合（2^Q）への関数**
    - ＝Qの部分集合の集合
  - Q :状態の集合
  - Σ :入力アルファベット
  - q_0 :初期状態
  - F :最終状態の集合

遷移関数の例



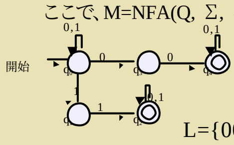
入力

状態

	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

NFAの受理集合

- 受理集合L(M)の定義
  L(M)={w| δ(q_0, w)がFの状態を少なくとも一つ含む}
  ここで, M=NFA(Q, Σ, δ, q_0, F)とする



L={00, 11, 000, 100, 01001, 0101101, 000111, …}

ε-動作を含むNFA

- ε-動作を含むNFA
  ＝空入力εによる状態遷移が許されたNFA
- Wがε-動作を含むNFAで受理
  ＝初期状態から最終状態へ至る道がw
  ただし、wに明示的にεは含まれない
- 定義式 M (Q, Σ, δ, q_0, F)
  δ＝Q×(Σ∪{ε})からQのベキ集合への関数
  → δ(q, a)
  ＝状態qからラベルaの遷移で移る先の状態の集合

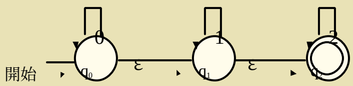
ε-動作を含むNFAの例

受理入力列の例

1. 002→00 ε ε2
2. 012 →0 ε1 ε2
3. 12 →ε1 ε2
4. 2 →ε ε2

δ　Σ∪{ε}

	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$



ε-動作ありNFAの受理言語

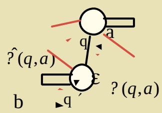
- 定義

  $M ? (Q,?,?,q_0,F)$が受理する言語は
  $\{w\,|\,\hat{?}(q_0,w)$はFの元を含む$\}$
  でありL(M)と書く。

$\hat{?}$の定義

1) $\hat{?}(q,?)\ ?\ ?\ ?\ CLOSURE(q)$
2) $\hat{?}(q,wa)\ ?\ ?\ ?\ CLOSURE(P)$
   ただし、 $w ? ?*, q ? ?$,

   $P ? \{p\,|$ある$\hat{?}(q,w)$の元rに対して$p ? ?(r,a)\}$



$\hat{?}(q,a)$は必ずしも $?(q,a)$と等しくない。

qからaの辺で直接到達できる状態の集合

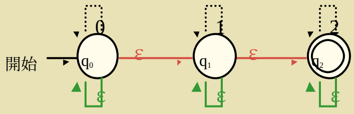
qからaをラベルに持つ道（εを含む）を通って到達できる状態の集合

ε -CLOSURE

- ある状態qからε -動作のみで移れる先の状態の集合
  文字列に対する遷移関数 ?̂ を定義するため
- ε -CLOSUREの定義
  – ε -CLOSURE(q)
    ＝遷移図からラベルがεでない有向辺を取り去った上で、qから到達可能な頂点の集合
  – ε -CLOSURE(P) : P は状態の集合
    ＝ □ ? ? *CLOSURE*(*q*)
    q? P

ε -CLOSUREの例

- ε -CLOSURE(q_0)={q_0, q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_1)={q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_2)={q_2}



ラベルがεである暗黙的な辺
長さ0の辺)

正則表現の定義

1. ∅は正則表現で、その表す集合は空集合である。
2. εは正則表現で、その表す集合は{ ε }である。
3. Σの各元aに対してaは正則表現で、その表す集合は{a}である。
4. rとsがそれぞれ言語RとSを表す正則表現のとき、(r+s)、(rs)、および(r*)は正則表現で、その表す集合はそれぞれ、R∪S、RS、R*である。

正則表現の例

- ∅、ε、a
- (∅+ε)=∅∪{ ε }={ ε }
- (∅+a)=∅∪{a}={a}
- (ε +a)={ ε }∪{a}={ ε ,a}
- (a+b)={a}∪{b}={a, b}
- ∅ε ={}{ ε }={}=∅
- ∅a={}{a}={}=∅
- ε a={ ε }{a}={a}
- ab={a}{b}={ab}
- ∅*= ε +{}+…={ ε }
- ε *= ε +{ ε }+…={ ε }
- a*= {a}*={ ε , a, aa, aaa, …}
- ((∅+ ε)+a)=(ε +a)={ ε }∪{a}={ ε , a}
- (∅(a+b))={}{a, b}={}=∅
- ((ab)+ ε)={ab}∪{ ε }={ ε , ab}
- ((ab)*)={ab}*={ ε , ab, abab, ababab, … }

正規表現の記法

- 演算の強さ
  * > 連接 > +

((0(1*))+0) → 01*+0
(1+(10))* → (1+10)*
((1(1(1*)))+(01)) → (111*+01)

例 その1

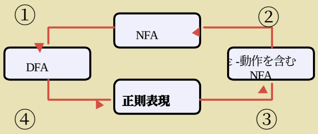
- 00={00}
- (0+1)*= ε +(0+1)+(0+1)(0+1)+…
  ={ ε , 0, 1, 00, 01, 10, 11, …}
- (1+10)*= ε +(1+10)+(1+10)(1+10)+…
  ={ ε , 1, 10, 11, 110, 101, 1010, … }
- (0+ ε)(1+10)*
  =(0+ ε)(ε +(1+10)+(1+10)(1+10)+…)
  =(0+ ε) (ε +1+10+11+110+101+1010+…)
  = { ε , 0, 1, 01, 10, 010, 11, 011, 110, 0110, 101, 0101, 1010, 01010, … }

例 その2

- (0+1)*011=(ε +(0+1)+(0+1)(0+1)+…)011
  =(ε +0+1+00+01+10+11+…)011
  ={011, 0011, 1011, 00011, 01011, 10011, 11011, … }
- 0*1*2*={0}*{1}*{2}*　図2.8のNFA
  ={ ε , 0, 00, … }{ ε , 1, 11, … } { ε , 2, 22, … }
  = { ε , 0, 1, 01, 012, 00, 001, 0011, 0012, 00112, 001122, 000, 0001, 00011, 00012, 000111, 000112, 0001112, 00011122, 000111222, … }

FA、正則表現の相互等価性

FA、正則表現は相互に等価である



① NFAからのDFAの作り方

NFA: M ({p, q, r, s}, {0, 1}, δ_2, p, {q, s})

→ DFA: M ′(Q ′, Σ, δ ′, q_0′, F ′)

δ_2

	0	1
p	q, s	q
q	r	q, r
r	s	p
s	-	p

→

δ ′　開始　F　Q

	0	1
[p]	[q, s]	[q]
[q]	[r]	[q, r]
[r]	[s]	[p]
[s]	-	[p]
[q, s]	[r]	[p, q, r]
[q, r]	[r, s]	[p, q, r]
[r, s]	[s]	[p]
[p, q, r]	[q, r, s]	[p, q, r]
[q, r, s]	[r, s]	[p, q, r]
-	-	-

生成されたDFA

DFA M={Q ′, Σ, δ, q_0 ′, F ′}

Q ′= { [p], [q], [r], [s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r], [q, r, s] }

Σ={0, 1}, q ′$_0$=[p]

F ′= { [q], [s], [q, r], [q, s] , [r, s], [p, q, r], [q, r, s] }

② ε -動作ありNFAからの ε -動作なしNFAの作り方

M=(Q, Σ, δ, q_0, F)

Q={q_0, q_1, q_2}

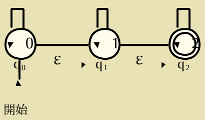
Σ={0, 1, 2}

δは右表

F={q_2}

δ

	0	1	2	ε
q_0	{q_0}	-	-	{q_1}
q_1	-	{q_1}	-	{q_2}
q_2	-	-	{q_2}	-

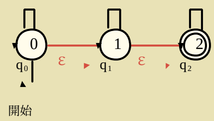


ε -CLOSUREを求める

ε -CLOSURE(q_0)={q_0, q_1, q_2}

ε -CLOSURE(q_1)={q_1 , q_2}

ε -CLOSURE(q_2)={q_2}



δ ´の求め方

? ?(q,a) ? ?̂(q,a) (q ? Q, a ? ?)

?̂(qᵢ, a) ? ? ? CLOSURE(? (? ? CLOSURE(qᵢ), a))

	0	1	2
q_0	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_0), 0))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_0), 1))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_0), 2))
q_1	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_1), 0))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_1), 1))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_1), 2))
q_2	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_2), 0))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_2), 1))	ε -CLOSURE(δ (ε -CLOSURE(q_2), 2))

δ 計算

	0	1	2
q_0	ε -CLOSURE(δ ({q_0 , q_1, q_2}, 0))	ε -CLOSURE(δ ({q_0 , q_1, q_2}, 1))	ε -CLOSURE(δ ({q_0 , q_1, q_2}, 2))
q_1	ε -CLOSURE(δ ({q_1 , q_2}, 0))	ε -CLOSURE(δ ({q_1 , q_2}, 1))	ε -CLOSURE(δ ({q_1 , q_2}, 2))
q_2	ε -CLOSURE(δ ({q_2}, 0))	ε -CLOSURE(δ ({q_2}, 1))	ε -CLOSURE(δ ({q_2}, 2))

$\delta(\{q_0, \ldots, q_n\}, x)$
$= \delta(q_0, x) \cup \ldots \cup \delta(q_n, x)$

$\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 0)$
$= \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) \cup \delta(q_2, 0)$
$= \{q_0\} \cup \{\} \cup \{\} = \{q_0\}$

δ ´最終結果

	0	1	2
q_0	ε -CLOSURE({q_0})	ε -CLOSURE({q_1})	ε -CLOSURE({q_2})
q_1	ε -CLOSURE(-)	ε -CLOSURE({q_1})	ε -CLOSURE({q_2})
q_2	ε -CLOSURE(-)	ε -CLOSURE(-)	ε -CLOSURE({q_2})

↓

	0	1	2
q_0	{q_0, q_1, q_2}	{q_1, q_2}	{q_2}
q_1		{q_1, q_2}	{q_2}
q_2			{q_2}

F ´を求める

F?? ?F ? {q_0}　? -CLOSUREがFの元を含むとき
?
?F　そうでないとき

ε -CLOSURE(q_0)={q_0, q_1, q_3}

∴F ´= {q_2} ∪ {q_0 }= {q_0 , q_2}

生成されたNFA

M ´=(Q ´, Σ, δ ´, q_0, F ´)

Q ´={q_0 , q_1, q_2}

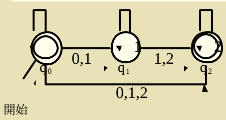
Σ ={0, 1, 2}

δ は右表

F ´={q_0 , q_2}

δ ´

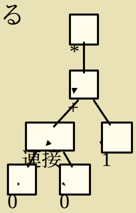
	0	1	2
q_0	{q_0, q_1, q_2 }	{q_1, q_2 }	{q_2 }
q_1	○	{q_1, q_2 }	{q_2 }
q_2	○	○	{q_2 }



③ 正則表現からの ε -動作を含むNFAの作り方

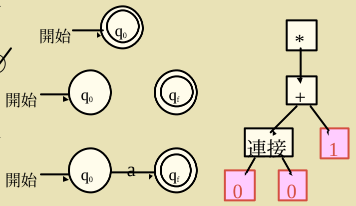
証明と同じ手順

1. 括弧つきに書き換える
   (00+1) → ((00)+1)*
2. 分解していく
   1. r = r_1*
   2. r_1 = r_2+r_3, r_3 =1
   3. r_2 = r_4+r_5, r_4 =1 , r_5 =1



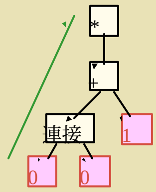
NFAの作り方
(NFAに変換 1)

3. 末端（最小構成)をFAに変換する
   1. r = ε
   2. r = ∅
   3. r = a

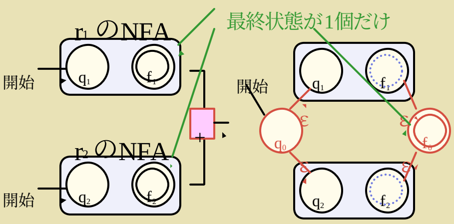


NFAの作り方
(NFAに変換 2)

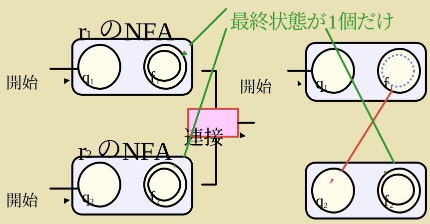
3. 末端から根に向かってどんどん変換する
   1. r =r_1+r_2
      → NFAの作り方 (a)
   2. r =r_1r_2
      → NFAの作り方 (b)
   3. r = r_1*
      → NFAの作り方 (c)



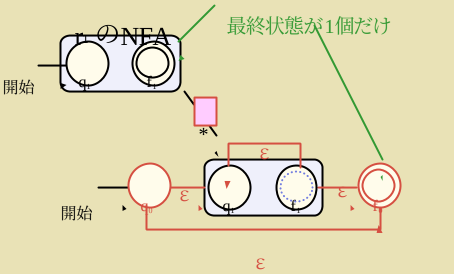
NFAの作り方(a)



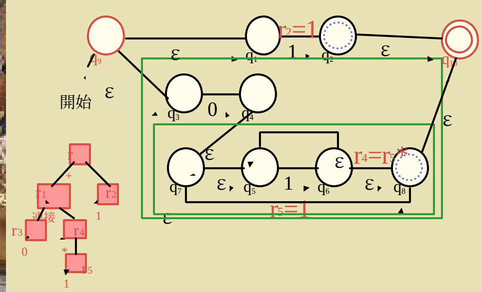
NFAの作り方(b)



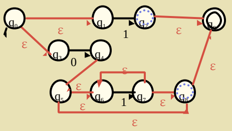
NFAの作り方(c)



NFA生成例



生成されたNFA

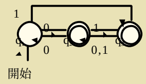


δ

	0	1	ε
q_0	-	-	$\{q_1\}$
q_1	-	$\{q_2\}$	-
q_2	-	-	$\{q_9\}$
q_3	$\{q_4\}$	-	-
q_4	-	-	$\{q_5\}$
q_5	-	-	$\{q_6, q_8\}$
q_6	-	$\{q_7\}$	-
q_7	-	-	$\{q_7, q_8\}$
q_8	-	-	$\{q_9\}$
q_9	-	-	-

- M(Q, {0, 1}, δ, q_0, {q_9})
- Q={q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9}
- δ は右表

④ 正則表現の作り方



$$?r_{ij}^{k} ? r_{ik}^{k?1}(r_{kk}^{k?1}*)r_{kj}^{k?1} ? r_{ij}^{k?1} \quad (k ? 1)$$
$$?r_{ij}^{0} ? a ? ? \quad (i ? j \text{のとき})$$
$$?r_{ij}^{0} ? a \quad (i ? j \text{のとき})$$

δ

	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_2

r_{ij}^{0}

j

i	q_1	q_2	q_3
q_1	ε	0	1
q_2	0	ε	1
q_3	-	0+1	ε

1以上の作り方

$$r_{ij}^{k} ? r_{ik}^{k?1}(r_{kk}^{k?1}*)r_{kj}^{k?1} ? r_{ij}^{k?1} \quad (k ? 1)$$
$$r_{ij}^{1} ? r_{ik}^{0}(r_{kk}^{0}*)r_{kj}^{0} ? r_{ij}^{0}$$

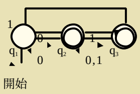
	q_1	q_2	q_3
q_1	ε(ε*)ε+ ε	ε(ε*)0+0	ε(ε*)1+1
q_2	0(ε*)ε+ ε	0(ε*)0+ ε	0(ε*)1+1
q_3	(ε*)ε+ ε	(ε*)0+(0+1)	(ε*)1+ε

	q_1	q_2	q_3
q_1	ε	0	1
q_2	0+ ε	00+ ε	01+1
q_3		0+1	ε

r_{ij}^{0}

	q_1	q_2	q_3
q_1	ε	0	1
q_2	0	ε	1
q_3		0+1	ε

生成された正則表現



$$r_{12}^{3} ? r_{13}^{3} ? 0*1((0?1)0*1)*(0?1)(00)*?(00)*?0*1((0?1)0*1)*$$
$$? 0*1((0?1)0*1)*((0?1)(00)*??) ? 0(00)*$$

最小化

最小化アルゴリズム (Myhill-Nerodeの定理から)

DFA Mの状態に関する同値類を導入

$$DFA M ? (Q, ?, ?, q_0, F)$$
$$p, q ? Q, x ? ?*$$
$$p ? q$$

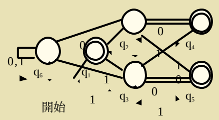
区別可能(distinguishable)
= 一方が最終状態で
もう一方が最終でない

同値(equivalent)

各入力列に対し、$?(p,x)$と$?(q,x)$はともに最終状態であるか、またはともに最終状態でない。

最小化の仕方1

- 最終状態とそうでない状態の組にXをつける。



	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2
q_1	×			×	×
q_2		×	×		
q_3		×	×		
q_4	×				
q_5	×				

最小化の仕方2

まだXのついてない場所を調べる。

1. (p, q)から、各記号aについて
   r= δ (p, a) とs= δ (q, a)を求める。
2. (r, s)のどれかに既にXがつい
   ていたら、(p, q)にもXをつける。
3. (r, s)のどれもXがついていなかったら、
   (p, q)を(r, s)のリストに加える。

	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2
q_1	×			×	×
q_2	×	×	×	×	
q_3	×	×	×		
q_4	×				
q_5	×				

最小化されたDFA

	q_6	q_5	q_4	q_3	q_2
q_1	×			×	×
q_2	×	×	×	×	
q_3	×	×	×		
q_4	×				
q_5	×				

→ $q_1 \equiv q_4$

$q_1 \equiv q_5$

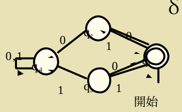
$q_4 \equiv q_5$

$[q_1, q_4] \to q_1$

$[q_1, q_5] \to q_1$

$[q_4, q_5] \to q_1$

$q_6 \to q_4$



δ

	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_4	q_1
q_3	q_1	q_4
q_4	q_4	q_4

最後に

- ミニテストを提出してから帰ること
- 次回は、文脈自由文法