

G

- ✎ $G=(N, \Sigma, P, S)$ に対して、 $V=N \cup N^*$ とする。
- ✎ u, v が次の(1), (2)を満たすとき $u \xrightarrow{G} v$ と書くことにする。
- (1) $u=xAy, v=x\alpha y$ ($x, y, \alpha \in V^*, A \in N$)。
- (2) $A \rightarrow \alpha$ はGの生成規則。

導出 (derive)

- ✎ $\xrightarrow{G}^*$
Gの反射的かつ推移的閉包
- ✎ V^* の要素の列 $w_0, \dots, w_n$ が
 $w_0 \xrightarrow{G} w_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} w_n$
 となっているとき、
 w_0 から w_n が導出されるといい、
 $w_0 \xrightarrow{G^*} w_n$ または $w_0 \xrightarrow{n} w_n$
 と書く。(Gは省略可: $\xrightarrow{*}, \xrightarrow{n}$)

文脈自由言語 (context-free language)

- ✎ Gの生成する語 w
 開始記号 S より
 終端アルファベット Σ 上の記号列 w が
 Gの生成規則によって導出されるとき
- ✎ Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して
- 1. Gが L を生成する: $L=L(G)$ となるとき。
- 2. 文脈自由言語: L を生成する文脈自由文法が存在する。

文脈自由言語の例 その1

1. Gを例1の文脈自由文法としたとき、
 $S \rightarrow aSb \mid aaSbb \mid \dots \mid a^{n-1}Sb^{n-1} \mid a^nb^n$
 となり、
 $L(G)=\{a^nb^n \mid n \geq 1\}$
 である。
2. Gを例2の文脈自由文法としたとき、
 $S \rightarrow xAx \mid x0$
 $S \rightarrow xAx \mid x1B \mid x10B \mid x10$
 となり、
 $L(G)=\{xu \mid u=1v, v \in \{0, 1\}^* \text{ または } u=0\}$

文脈自由言語の例 その2

1. $G=(N, \Sigma, P, S)$ を
 $N=\{S\}, \Sigma=\{\}, \{\}, P=\{S \rightarrow SS, S \rightarrow (S), S \rightarrow ()\}$
 とすると、言語 $L(G)$ はかっこの入れ子構造
2. $G=(N, \Sigma, P, S)$ を
 $N=\{S\}, \Sigma=\{0, 1, \Phi, +, *, \cdot, \wedge, \vee\}, \{\},$
 $P=\{S \rightarrow \Phi \mid 0 \mid 1 \mid (S+S) \mid SS \mid S^* \}$
 とすると、言語 $L(G)$ は $\{0, 1\}$ 上の正規表現全体

文脈自由文法のクラス

- ✎ 文脈自由文法のクラスを **CFL** と書く
- ✎ **CFL**
 $=\{L \mid L=L(G) \text{ となる文脈自由文法 } G \text{ がある}\}$

構文木 (parse tree)

- 文脈自由文法 $G=(N, \Sigma, P, S)$ に対して、構文木を帰納的に定義する。
- ここで、 $V=N \cup \Sigma$ とする。

構文木の定義(1)

- (1) 各 $A \in V$ に対して、記号 A をラベルとする1つの頂点のみからなる木



は構文木である。

構文木の定義(2)

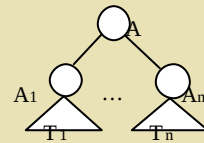
- (2) $A \rightarrow \varepsilon$ に対して、



は構文木である。

構文木の定義(3)

- (3) $T_1, \dots, T_n$ を根のラベルが $A_1, \dots, A_n \in V$ である構文木とする。 G の生成規則 $A \rightarrow A_1 \dots A_n$ に対して、 A を根とする木



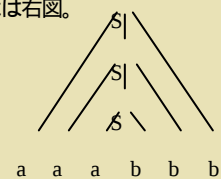
は構文木である。

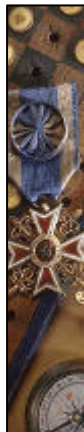
構文木の定義(4)

- (4) 上の(1)～(3)の規則を使って定義される有限の木のみを構文木という。

構文木の例

$G=(N, \Sigma, P, S)$ を
 $N=\{S\}$, $\Sigma=\{a, b\}$, $P=\{S \rightarrow ab, S \rightarrow aSb\}$
 としたとき、構文木は右図。





最左導出

(leftmost derivation)

👉 導出 u^*v の各ステップにおいて一番左にある非終端記号が置き換えられているとき、その導出は最左導出である。

- $G=(N, \Sigma, P, S)$ を
 $N=\{S\}, \Sigma=\{\}, \{ \}, P=\{S \rightarrow SS, S \rightarrow (S), S \rightarrow ()\}$
 とすると
 $S \quad (S) \quad ((S)) \quad (((S)) \quad (((()S)) \quad (((()()S))$
 は最左導出。

- $G=(N, \Sigma, P, S)$ を
 $N=\{S\}, \Sigma=\{\}, \{\}, P=\{S \rightarrow SS, S \rightarrow (S), S \rightarrow ()\}$
とすると
 $S \quad (S) \quad ((S)) \quad (((SS))) \quad (((()S)) \quad (((()()))$
は最左導出。

走査

(*traverse*)

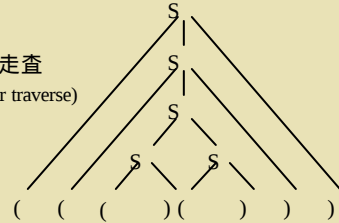
根から始めてどのように走査するか

A * u
最左導出
→ 左側順走査
(*preorder traverse*)

```
graph TD; S1[S] --- A[A]; S1 --- star[*]; A --- u[u]; star --- S2[S]; star --- S3[S]; S2 --- LP1["("]; S2 --- RP1[")"]; S3 --- LP2["("]; S3 --- RP2[")"];
```

$$A^*u$$

→ 左側順走査
(preorder traversal)



補題

 $G=(N, \Sigma, P, S)$ を文脈自由文法とする。導出 $u \rightarrow v$ があるならば、 u から v への最左導出がある。

証明

$u = w_1 A_1 w_2 \dots w_k A_k w_{k+1} (A_i \in N, w_j \in \Sigma^*)$ とする。

このとき、 v の分解 $v = w_1 v_1 w_2 \dots w_k v_k w_{k+1}$ があって、
 $A_i \rightarrow v_i (1 \leq i \leq k)$ となる。

そこで、 $A_i \rightarrow v_i$ に対する構文木を取り、その左側順走査を考えれば、 A_i から v_i への最左導出が得られる。
 それらの最左導出を、非終端記号の順に適用していけば求める最左導出が得られる。

プッシュダウンオートマトン

(pushdown automaton)

PDA = FA + プッシュダウンストア

⇐ **プッシュダウンストア (スタック)**

- 記号列を記憶している
- プッシュダウンヘッドが一番上の記号を指す
- 一番上の記号 (**トップ記号**)のみ読める
- 2つの操作
 - ・ **プッシュ**(push): 新たな記号列を積む
 - ・ **ポップ**(pop): トップ記号を取り除く

PDAの定義

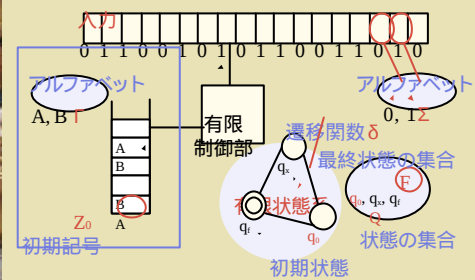
♣ プッシュダウンオートマトン
(pushdown automaton (pda))

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$

Q: 状態の有限集合。
 Σ : 入力アルファベット。
 Γ : プッシュダウンストアのアルファベット
 δ : 遷移関係 = 遷移の集合
 $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*$ の有限部分集合。
 (q, a, Z, p, α) δ のとき、 (p, α) $\delta(q, a, Z)$ と書く。

q_0 : 初期状態、 $q_0 \in Q$
 Z_0 : 初期記号、 $Z_0 \in \Gamma$
F: 最終状態の集合、 $F \subseteq Q$

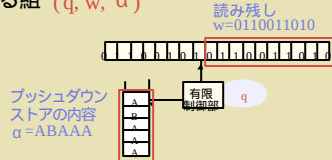
The diagram illustrates the components and operation of a Pushdown Automaton (PDA). At the top, an input tape contains the sequence 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 0. Below the tape is a stack containing the symbols A, B, B, and Z₀ at the bottom. A control unit labeled '有限制御部' (Finite Control Unit) is connected to the input tape and the stack. A state transition diagram shows three states: q₀, q₁, and q₂. Transitions are labeled with input symbols and stack symbols. The diagram also includes labels for '初期記号' (Initial symbol), '初期状態' (Initial state), '最終状態の集合' (Set of final states), and '状態の集合' (Set of states).



計算状態 (configuration)

計算状態とは、

PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ に対して、
状態 $q \in Q$, 入力 $w \in \Sigma^*$, 記号列 $\alpha \in \Gamma^*$
から成る組 (q, w, α)



$\vdash_M$

$\vdash_M$ の定義

$Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ から $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ への関係
 $(q, ax, Z\alpha) \vdash_M (p, x, \beta\alpha)$

$(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$

$p, q \in Q, a \in \Sigma \setminus \{\epsilon\}, Z \in \Gamma, \alpha, \beta \in \Gamma^*$

読み方:

遷移 $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ によって、
計算状態 $(q, ax, Z\alpha)$ から $(p, x, \beta\alpha)$ に動作する。

ϵ 動作 (ϵ -move)

遷移 $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$ において、 $a = \epsilon$ の
とき、入力記号を読み込まずに動作する
こと。

$(q, x, Z\alpha) \vdash_M (p, x, \beta\alpha)$

- Z がポップされ、 β がプッシュされる。
- プッシュダウンストアが空のときは動作は起こらない。

PDAの例

PDA

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

$Q=\{q_0, q_1, q_2\}$,

$\Sigma=\{0, 1\}$,

$\Gamma=\{Z_0, 0, 1\}$,

$F=\{q_2\}$

δ を右表とする。

q	a	Z	$\delta(q, a, Z)$
q_0	0	Z_0	$((q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0))$
q_0	1	Z_0	$((q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0))$
q_0	0	0	$((q_0, 00), (q_1, 00))$
q_0	1	1	$((q_0, 11), (q_1, 11))$
q_1	ϵ	0	$((q_1, \epsilon), (q_2, \epsilon))$
q_1	ϵ	1	$((q_1, \epsilon), (q_2, \epsilon))$
q_1	ϵ	Z_0	$((q_1, \epsilon), (q_2, \epsilon))$

例の動作

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_0, 100101, 0Z_0)$

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_0, 00101, 10Z_0)$

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_1, 0101, 010Z_0)$

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_1, 101, 10Z_0)$

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_1, 01, 0Z_0)$

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_1, 1, Z_0)$

$(q_1, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_2, 1, \epsilon)$

$(q_1, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_2, \epsilon)$

$\vdash_M^*$, $\vdash_M^t$

$\vdash_M^*$

= $\vdash_M$ の反射的かつ推移的閉包

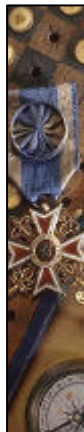
$\vdash_M^t$

= $(p_0, w_0, \alpha_0) \vdash_M (p_1, w_1, \alpha_1) \vdash_M \dots \vdash_M (p_t, w_t, \alpha_t)$

t : 計算のステップ数

省略形

$\vdash^*$, $\vdash^t$



2種類の受理

1. 最終状態によって受理
 入力 w に対して、 $q \in Q$ と Γ^* が存在して
 $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \gamma)$
 $L(M)$: 最終状態によって受理される記号列の集合
2. 最終状態と空ストアによって受理
 入力 w に対して、 $q \in Q$ が存在して
 $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \varepsilon)$
 $N(M)$: 最終状態と空ストアによって受理される記号列の集合

受理の例

1	2	$\delta(q_0, a, Z_0)$
1	0	$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon), \delta(q_0, \varepsilon)$
0	0	$\delta(q_0, \varepsilon), \delta(q_0, Z_0)$
0	0	$\delta(q_0, 0), \delta(q_0, 0)$
0	0	$\delta(q_0, 0), \delta(q_0, 1)$
0	0	$\delta(q_0, 1), \delta(q_0, 1)$
0	0	$\delta(q_0, 1), \delta(q_0, 1)$
0	0	$\delta(q_0, \varepsilon), \varepsilon$
0	0	$\delta(q_0, \varepsilon), \varepsilon$
0	0	$\delta(q_0, \varepsilon), \varepsilon$

$|_M (q_0, 110, 0Z_0)$

$|_M (q_1, 10, 10Z_0)$

$|_M (q_1, 0, 0Z_0)$

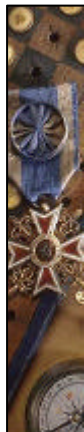
$|_M (q_1, \varepsilon, Z_0)$

$|_M (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

0110 $L(M)$ かつ0110 $N(M)$

$L(M)=N(M)=\{ww^R|w \in \{0,1\}^*\}$

w^R はwの反転



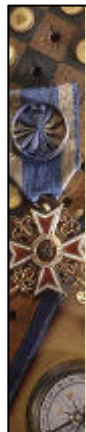
2つの受理は同値

言語 L Σ^* に対して、次の(1)(2)は同値

- (1) あるPDA M に対して $L = L(M)$ となる。
- (2) あるPDA M に対して $L = N(M)$ となる。

証明:

次回



最後に

- ✧ ミニテストを提出してから帰ること
- ✧ 次回は、
 - 文脈自由文法とプッシュダウンオートマトンの等価性