計算の理論 II
等価性と標準形

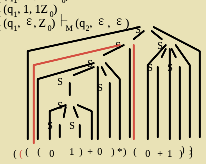
月曜4校時
大月美佳

講義の前に

✍前回の失敗：(問題)解答の一部ミス

q	a	Z	δ(q, a, Z)
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	ε	Z_0	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

$(q_0, 101101, Z_0) \vdash_M (q_0, 01101, 1Z_0)$
$\vdash_M (q_0, 1101, 01Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 101, 101Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 01, 01Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 1, 1Z_0)$
$\vdash_M (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash_M (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$



今日の講義内容

1. CFLとPDAの等価性
   1. CFL⊆NPDA
   2. NPDA⊆CFL
2. Chomsky標準形の作り方
   1. ε生成規則の消去
   2. 鎖生成規則の消去
   3. Chomsky標準形の作り方

前回の証明残り
2つの受理の同値

言語L⊆Σ*に対して、次の(1)(2)は同値
- (1) あるPDA Mに対してL=L(M)となる。
- (2) あるPDA Mに対してL=N(M)となる。

証明:
- a. (1)⇒(2)
  L(M)なMを変換してN(M')なM'を作成する。
- b. (2)⇒(1)
  N(M')なM'を変換してL(M)なMを作成する。

復習
2種類の受理

1. 最終状態によって受理
   入力wに対して, q∈Qとγ∈Γ*が存在して
   $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \gamma)$
   L(M): 最終状態によって受理される記号列の集合
2. 最終状態と空ストアによって受理
   入力wに対して, q∈Qが存在して
   $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \varepsilon)$
   N(M): 最終状態と空ストアによって受理される記号列の集合

受理の例

q	a	Z	δ(q, a, Z)
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	ε	Z_0	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

$(q_0, 0110, Z_0) \vdash_M (q_0, 110, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 10, 10Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 0, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_1, \varepsilon, Z_0)$
$\vdash_M (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

0110∈L(M)かつ0110∈N(M)
$L(M)=N(M)=\{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$
w^Rはwの反転

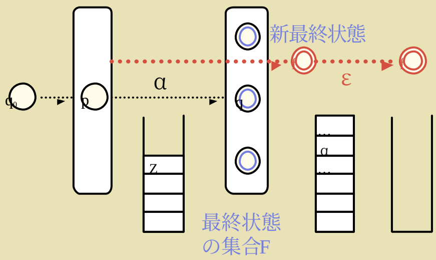
証明ステップ a
L(M)なMから変換

L=L(M)なM=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, Z_0, F)
から、M´=(Q∪{f}, Σ, Γ, δ´, q_0, Z_0, {f})
を作る。δ´はδに次の遷移を加えたもの。

(i) (q, α)∈δ(p, a, Z)かつq∈Fのとき、(f, α)∈δ´(p, a, Z)

(ii) すべてのZ∈Γに対して(f, ε)∈δ´(f, ε, Z)

変換の意味 a



証明ステップ b
N(M´)なM´から変換

L=N(M´)なM=(Q´, Σ´, Γ´, δ´, q_0´, Z_0´, F´)
から、M=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, S, F)
を作る。

Q=Q´∪{q_0, f}　（ただしq_0, f∉Q）

Γ=Γ´∪{S}　（ただしS∉Γ´）

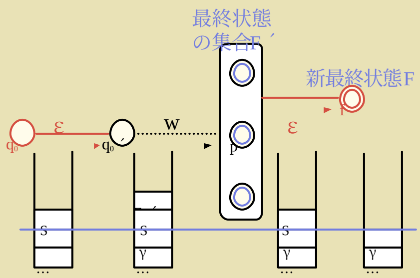
F={f}

δはδ´に次の遷移を加えたもの。

(i) δ(q_0, ε, S)={(q_0´, Z_0´S)}

(ii) δ(p, ε, S)={(f, ε)}　ただしp∈F´

変換の意味 b



CFLとNPDAの等価性

- 等価性を以下の手順で示す
  1. CFL⊆NPDA
     CFLである言語Lがあるとき、
     最終状態と空ストアで受理するようなNPDA
     を作れることを示す。
  2. NPDA⊆CFL
     言語Lを最終状態と空ストアで受理する
     ようなNPDAがあるとき、
     Lを生成する文脈自由文法が作れることを示す。

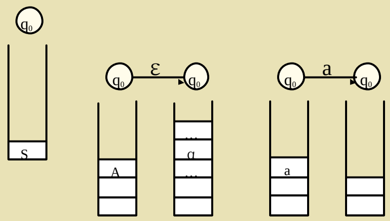
CFL⊆NPDAを示す

- L∈CFLとし、L⊆Σ*を生成する文脈自由文法をG=(N, Σ, P, S)とする。
- Lを最終状態と空ストアで受理するNPDA M=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, Z_0, F)が作れる。

ここで、Q={q_0}、Γ=N∪Σ、初期記号Z_0がS∈N
F={q_0}、遷移関数δは以下

1. δ(q_0, ε, A)={(q_0, α) | A→α∈P}
2. δ(q_0, a, a)={(q_0, ε)}（ただし、a∈Σ）

作られたNPDAの模式図



N(M)=L(G)の証明

- 次の(a), (b)が同値であることを示せば良い。

(a) 最左導出 $X \overset{*}{\Rightarrow} u\alpha$ がある。

(b) $(q_0, u, X) \vdash^{*} (q_0, \varepsilon, \alpha)$

ただし、$X \in N$、$u \in \Sigma^*$、$\alpha \in N(N \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$ とする。

(a)⇒(b)の証明

導出の長さについての帰納法

1. 長さが0のとき

   $u=\varepsilon$, $\alpha=X$であれば計算状態は(q_0, ε, X)

2. 長さがnのとき成立を仮定

   このとき長さn+1の最左導出

   $X \overset{n+1}{\Rightarrow} u\alpha$ (ただし、$u \in \Sigma^*$, $\alpha \in N(N \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$)

   をとる。この最左導出は

   $X \overset{n}{\Rightarrow} vA\beta \Rightarrow v\gamma\beta$ (ただし、$v \in \Sigma^*$, $A \to \gamma \in P$)

   のように長さnの最左導出と長さ1の最左導出に分解できる。ここで、$u=vx$, $x \in \Sigma^*$, $\gamma\beta = x\alpha$と書ける。

(a)⇒(b)の証明つづき

2のつづき

帰納法の仮定より、

$(q_0, v, X) \vdash^{*} (q_0, \varepsilon, A\beta)$

となる。したがって

$(q_0, vx, X) \vdash^{*} (q_0, x, A\beta)$

$\vdash (q_0, x, \gamma\beta)$ $\because A \to \gamma \in P$

$\vdash (q_0, x, x\alpha)$ $\because \gamma\beta = x\alpha$

$\vdash^{*} (q_0, \varepsilon, \alpha)$

となり、n+1のときも成り立つ。

よって1, 2より(a)→(b)は成り立つ。

(b)⇒(a)の証明

計算のステップ数についての帰納法

1. ステップ数が0のとき

   $u=\varepsilon$, $\alpha=X$

   計算状態が(q_0, ε, X)であれば導出の長さ0なX

2. ステップ数がn以下であるとき成立すると仮定

   このとき、ステップ数n+1の計算

   $(q_0, u_0, \alpha_0) \vdash \ldots \vdash (q_0, u_n, \alpha_n) \vdash (q_0, u_{n+1}, \alpha_{n+1})$

   をとる。ただし、$u_0=u$, $\alpha_0=X$, $u_{n+1}=\varepsilon$, $\alpha_{n+1}=\alpha$。

(b)⇒(a)の証明つづき1

2のつづき

以下の2つの場合について考える。

(1) n+1番目のステップで(i)の遷移が使われている

(2) n+1番目のステップで(ii)の遷移が使われている

(1)の場合

先の計算は以下のように分解できる。

$(q_0, u, X) \vdash^{n} (q_0, \varepsilon, A\beta) \vdash (q_0, \varepsilon, \gamma\beta)$

ただし、$A \to \gamma \in P$, $\gamma\beta = \alpha$。

帰納法の仮定より、最左導出 $X \Rightarrow uA\beta$ が存在する。

また、$X \Rightarrow uA\beta \Rightarrow u\gamma\beta$ は最左導出 ($\because$ $A \to \gamma \in P$ で$u \in \Sigma^*$)

$\therefore X \Rightarrow u\alpha$ なる最左導出が存在する。

(b)⇒(a)の証明つづき2

2のつづき

以下の2つの場合について考える。

(1) n+1番目のステップで(i)の遷移が使われている

(2) ~~n+1番目のステップで(ii)の遷移が使われている~~

(2)の場合

Xは非終端記号だから第1ステップでは(ii)の遷移は適用不可。
ゆえに、m-1ステップ目では(i)の遷移が適用され、
すべてのt ($m \leqq t \leqq n+1$)に対して、tステップ目では
(ii)の遷移が適用されているようなある時点m($2 \leqq m \leqq n+1$)
が存在する。
つまり、計算$(q_0, u, X) \vdash^n (q_0, \varepsilon, \alpha)$は次のように分解できる。

(b)⇒(a)の証明つづき3

2の(2)のつづき

$(q_0, vx, X) \vdash^{m-2} (q_0, x, A\beta) \vdash (q_0, x, \gamma\beta)$

$\vdash^{n-m+2} (q_0, \varepsilon, \alpha)$

ここで、$u=vx$, $A \rightarrow \gamma \in P$, $\gamma\beta = x\alpha$。
また$(q_0, vx, X) \vdash^{m-2} (q_0, x, A\beta)$ならば、
$(q_0, v, X) \vdash^{m-2} (q_0, \varepsilon, A\beta)$であるので、帰納法の仮定より
最左導出 $X \Rightarrow vA\beta$ が存在する。
また、$X \Rightarrow vA\beta \Rightarrow v\gamma\beta$は最左導出（∵ $A \rightarrow \gamma \in P$ で$v \in \Sigma^*$)
$\gamma\beta = x\alpha$, $vx=u$であるので$X \Rightarrow u\alpha$なる最左導出が存在する

1, 2より(b)⇒(a)が成り立つことが示された。

N(M)=L(G)の証明結論

- 以下が同値であることが示された
  (a) 最左導出 $X \Rightarrow u\alpha$ がある。
  (b) $(q_0, u, X) \vdash (q_0, \varepsilon, \alpha)$
  ただし、$X \in N$、$u \in \Sigma^*$、$\alpha \in N(N \cup \Sigma)^* \cup \{\varepsilon\}$
  とする。
- Gの導出は最左導出として良いので、
  $W \in \Sigma^*$に対して
  $S \Rightarrow w \Leftrightarrow (q_0, w, S) \vdash (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$
  となる。
  L(G)=N(M)となり、これはL∈NPDAであることと等しい。

CFLをNPDAに変換してみる

- 文脈自由文法$G=(N, \Sigma, P, S)$を
  $N=\{S\}$, $\Sigma=\{a, b\}$, $P=\{S \rightarrow ab, S \rightarrow aSb\}$
  とする。
- NPDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
  $Q=\{q_0\}$, $\Gamma=\{S, a, b\}$, $Z_0=S$, $F=\{q_0\}$
  δは右表。

q	x	Z	δ(q, x, Z)
q_0	ε	S	$\{(q_0, aSb), (q_0, ab)\}$
q_0	a	a	$\{(q_0, \varepsilon)\}$
q_0	b	b	$\{(q_0, \varepsilon)\}$

NPDA⊆CFLを示す

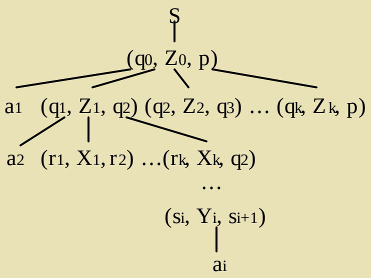
- L∈NPDAとし、Lを最終状態と空ストアで受理するNPDAを$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$とする。
- $L \subseteq \Sigma^*$を生成する文脈自由文法 $G=(N, \Sigma, P, S)$が作れる。

作られたCFL

CFL $G=(N, \boxed{\Sigma, P, S)}$を次のように定義する。

1. $N=Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$
2. Pは次の生成規則よりなる。
   (i) 各$p \in F$に対して、$S \rightarrow (q_0, Z_0, p)$は生成規則である。
   (ii) $(p, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(q, a, Z)$ ($k \geqq 1$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$)のとき、任意の$q_1, q_2, \ldots, q_k \in Q$に対して
   $(q, Z, q_k) \rightarrow a(p, Z_1, q_1)(q_1, Z_2, q_2)\ldots(q_{k-1}, Z_k, q_k)$
   は生成規則である。
   (iii) $(p, \varepsilon) \in \delta(q, a, Z)$ ($a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$)のとき
   $(q, Z, p) \rightarrow a$は生成規則である。

作られたCFLの構文木



N(M)=L(G)の証明

- 次の(a), (b)が同値であることを示せば良い。

(a) $(q, Z, p) \Rightarrow x$

(b) $(q, x, Z) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$

ここで、(q, Z, p)は非終端記号、$x \in \Sigma^*$

(a)⇒(b)の証明

導出の長さ（1以上）に関する帰納法

1. 長さが1のとき
   つまり$(q, x, p) \Rightarrow x$のとき
   (iii) より、$x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$で$(p, \varepsilon) \in \delta(q, x, Z)$となる。
   したがって、$(q, x, Z) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)$となる。
2. 長さn以下の導出に対して成立することを仮定
   このとき、長さ$n+1 \geqq 2$の導出
   $(q, Z, p) \overset{n+1}{\Rightarrow} x$
   をとる。
   導出の長さが2以上だから一番初めに適用される生成規則は(ii)の形のものである。

(a)⇒(b)の証明つづき1

2のつづき

このとき導出$(q, Z, p) \Rightarrow x$は以下のように書ける。

$(q, Z, p) \Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2)\ (q_2, Z_2, q_3)\ \ldots (q_k, Z_k, p)$
$\quad \Rightarrow x$

と書ける。ただし、$(q_1, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(q, a, Z)$。
すると、$x = ax_1 \ldots x_k$と書けて、各$i(1 \leqq i \leqq k)$に対して
長さn以下の導出で
$(q_i, Z_i, q_{i+1}) \Rightarrow x_i$
となる。ただし、$q_{k+1} \Rightarrow p$とする。

(a)⇒(b)の証明つづき2

2のつづき

帰納法の仮定より
$(q_i, x_i, Z_i) \vdash (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon) \quad (1 \leqq i \leqq k)$
となる。このとき、

$$
\begin{aligned}
(q, ax_1 \ldots x_k, Z) &\vdash (q_1, x_1 \ldots x_k, Z_1 \ldots Z_k) \\
&\vdash (q_2, x_2 \ldots x_k, Z_2 \ldots Z_k) \\
&\ldots \\
&\vdash (q_k, x_k, Z_k) \\
&\vdash (p, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

となる。

1と2より(a)⇒(b)は成立する。

(b)⇒(a)の証明

計算のステップ数についての帰納法

1. ステップ数が1のとき
   $(q, x, Z) \vdash (p, \varepsilon, \varepsilon) \quad p \in F,\ x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
   ならば、$(p, \varepsilon) \in \delta(q, x, Z)$であるので、
   (iii)より$(q, Z, p) \to x \in P$となるので成立。
2. ステップ数がnのとき成り立つと仮定
   $n+1 \geqq 2$として、
   $(q, x, Z) \vdash^{n+1} (p, \varepsilon, \varepsilon) \quad p \in F,\ x \in \Sigma^*$
   とする。

(b)⇒(a)の証明つづき1

2のつづき

$(q, x, Z) \vdash^{n+1} (p, \varepsilon, \varepsilon)$　$p \in F, x \in \Sigma^*$
を最初の1ステップと残りのnステップに分解する。
$n \geqq 1$であるので第1ステップでZがポップされて
εに置き換えられることはない。よって、
$(q, x, Z) \vdash (r, y, Z_1 \ldots Z_k)$
$\vdash^{n} (p, \varepsilon, \varepsilon)$
となる。ここで$x=ay$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$であり、
$(r, y, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(q, a, Z)$である。

(b)⇒(a)の証明つづき2

2のつづき

$(r, y, Z_1 \ldots Z_k)$の各Z_iはいずれポップされるので、
分解$y=y_1 \ldots y_k$ $(y_i \in \Sigma^*, 1 \leqq i \leqq k)$と
状態$q_1, \ldots, q_k$が存在して、
各i $(1 \leqq i \leqq k)$に対して、n以下のステップ数で
$(q_i, y_i, Z_i) \vdash^{*} (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon)$
となる。ただし、$q_1=r, q_{k+1}=p$とする。
これは、帰納法の仮定より
$(q_i, Z_i, q_{i+1}) \overset{*}{\Rightarrow} y_i$　$(1 \leqq i \leqq k)$
と同値である。

(b)⇒(a)の証明つづき3

2のつづき

(ii)より$(q, Z, p) \Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2) \ldots (q_k, Z_k, p)$だから
$(q, Z, p) \Rightarrow a(q_1, Z_1, q_2) \ldots (q_k, Z_k, p)$
$\overset{*}{\Rightarrow} ay_1 \ldots y_k$
となる。よって
$(q, Z, p) \overset{*}{\Rightarrow} x$
となる。

1, 2より(b)⇒(a)が言えた。

N(M)=L(G)証明結論

- 以下の(a)と(b)の同値性が言えた。
  (a)　$(q, Z, p) \overset{*}{\Rightarrow} x$
  (b)　$(q, x, Z) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)$
  ここで、(q, Z, p)は非終端記号、$x \in \Sigma^*$
- $x \in \Sigma^*$に対して$S \overset{*}{\Rightarrow} x$ならば、
  (i)によりある状態$p \in F$が存在して
  $S \Rightarrow (q_0, Z_0, p) \overset{*}{\Rightarrow} x$となる。したがって
  $(q_0, x, Z_0) \vdash^{*} (p, \varepsilon, \varepsilon)$となり、xはMにより受理される。
  逆にxがMによって受理されれば、$S \overset{*}{\Rightarrow} x$となる。

NPDAをCFLに変換してみる

- NPDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$を
  $Q=\{q_0\}$, $\Sigma=\{a, b\}$, $\Gamma=\{A, a, b\}$,
  $Z_0=A$, $F=\{q_0\}$
  $\delta(q_0, \varepsilon, A)=\{(q_0, ab), (q_0, aAb)\}$
  $\delta(q_0, a, A)=\{(q_0, \varepsilon)\}$
  $\delta(q_0, b, A)=\{(q_0, \varepsilon)\}$
  とする。

NPDAをCFLに変換してみる2

- $N=Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$
  $=\{q_0\} \times \{A, a, b\} \times \{q_0\} \cup \{S\}$
  $=\{(q_0, A, q_0), (q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0), S\}$
- 生成規則
  (i)　$S \to (q_0, A, q_0)$
  (ii)　$(q_0, A, q_0) \to \varepsilon(q_0, a, q_0)(q_0, b, q_0)$
  　　$(q_0, A, q_0) \to \varepsilon(q_0, a, q_0)(q_0, A, q_0)(q_0, b, q_0)$
  (iii)　$(q_0, a, q_0) \to a$
  　　$(q_0, b, q_0) \to b$

変換結果

生成されたCFL

$G=(N, \Sigma, P, S)$

$N=\{S, (q_0, A, q_0), (q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0)\}$

$\Sigma=\{a, b\}$

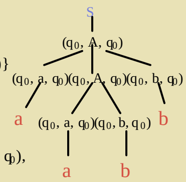
$P=\{S \to (q_0, A, q_0),$

$(q_0, A, q_0) \to (q_0, a, q_0)(q_0, b, q_0),$

$(q_0, A, q_0) \to (q_0, a, q_0)(q_0, A, q_0)(q_0, b, q_0),$

$(q_0, a, q_0) \to a,$

$(q_0, b, q_0) \to b\}$



Chomsky標準形

✍文脈自由文法$G=(N, \Sigma, P, S)$

その生成規則の形が

$A \to BC \quad (A, B, C \in N)$

$A \to a \quad (A \in N, a \in \Sigma)$

のときChomsky標準形であるという。

Chomsky標準形の作り方

1. ε生成規則の消去
   ← ε生成規則消去定理
2. 鎖生成規則の消去
   ←鎖生成規則の消去定理
3. Chomsky標準形の構成

ε生成規則の消去

文脈自由文法　$G=(N, \Sigma, P, S)$に対して、以下のような性質をもつ$G'=(N', \Sigma, P', S')$を構成できる。

(1) $L(G')=L(G)$

(2) $\varepsilon \in L(G)$のときのみG'はε生成規則をもち、それは$S' \to \varepsilon$に限る。

(3) G'の開始記号S'はP'のどの生成規則にも現れない。

ε生成規則の消去法

$G'=(N', \Sigma, P', S')$の構成法

$N'=N \cup \{S'\} \quad (S' \notin N)$

P'は次の生成規則より成る

(i) $\varepsilon \in L(G)$ならば$S' \to \varepsilon$は生成規則である。

(ii) $S' \to S$は生成規則である。

(iii) $A \to \alpha_1 A_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k A_k \alpha_{k+1} \in P$,
$A_i \in N \cup \Sigma \ (1 \leqq i \leqq k)$, $\alpha_i \in N_n{}^*$ならば
$A \to A_1 \ldots A_k$は生成規則である$(k \geqq 1)$。

ε生成規則の消去法つづき

✍ここで、N_iは次のように定義される。

$n=|N|, i=1, \ldots, n$

$N_1=\{A | A \to \varepsilon \in P\}$

$N_{i+1}=N_i \cup \{A | A \to \alpha \in P, \ \alpha \in N_i{}^*\}$

ε生成規則の消去例１

G=(N, Σ, P, S)を以下のようであるとする。

N={S, A, B, C}, Σ={a, b, c},

P={S→AB, A→ABAC|B|a,

B→C|b| ε, C→B|c| ε }

1. G´=(N´, Σ, P´, S´)

N´= N∪{S´}={S, A, B, C, S´}, Σ={a, b, c}

ε生成規則の消去例２

2. 生成規則P´

P={S→AB, A→ABAC|B|a,

B→C|b| ε, C→B|c| ε }

1. (i)より、 ε∈L(G)だからS´→ ε
2. (ii)より、S´→S
3. (iii)より、
   1. N_iを調べる。
      $N_1=\{B, C\}$, $N_2=\{A, B, C\}$, $\boxed{N_3=\{S, A, B, C\}}$
   2. S→ABについて、
      1. $A_1=A$, $A_2=B$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\varepsilon$ とすると、S→AB
      2. $A_1=A$, $\alpha_1=\varepsilon$, $\alpha_2=B$とすると、S→A
      3. $A_1=B$, $\alpha_1=A$, $\alpha_2=\varepsilon$ とすると、S→B

ε生成規則の消去例３

2の3のつづき

3. A→ABAC について、
   1. $A_1=A$, $A_2=B$, $A_3=A$, $A_4=C$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\varepsilon$ とすると、A→ABAC
   2. $A_1=A$, $A_2=B$, $A_3=A$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\varepsilon$, $\alpha_4=C$とすると、A→ABA
   3. $A_1=A$, $A_2=B$, $A_3=C$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\varepsilon$, $\alpha_3=A$ とすると、A→ABC
   4. $A_1=A$, $A_2=A$, $A_3=C$, $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_4=\varepsilon$, $\alpha_2=B$とすると、A→AAC
   5. $A_1=B$, $A_2=A$, $A_3=C$, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\varepsilon$, $\alpha_1=A$ とすると、A→BAC

ε生成規則の消去例４

2の3のつづき

3. A→ABACについて、
   6. $A_1=A$, $A_2=B$, $\alpha_1=\alpha_2=\varepsilon$, $\alpha_4=AC$ とすると、A→AB
   7. $A_1=A$, $A_2=A$, $\alpha_1=\varepsilon$, $\alpha_2=B$, $\alpha_4=C$ とすると、A→AA
   8. $A_1=A$, $A_2=C$, $\alpha_1=\varepsilon$, $\alpha_2=BC$, $\alpha_4=\varepsilon$ とすると、A→AC
   9. $A_1=B$, $A_2=A$, $\alpha_1=A$, $\alpha_2=\varepsilon$, $\alpha_4=C$とすると、A→BA
   10. $A_1=B$, $A_2=C$, $\alpha_1=A$, $\alpha_2=A$, $\alpha_4=\varepsilon$ とすると、A→BA
   11. $A_1=A$, $A_2=C$, $\alpha_1=AB$, $\alpha_2=\varepsilon$, $\alpha_4=\varepsilon$ とすると、A→AC
   12. $A_1=A$, $\alpha_1=\varepsilon$, $\alpha_2=BAC$とすると、A→A
   13. $A_1=B$, $\alpha_1=A$, $\alpha_2=AC$とすると、A→B
   14. $A_1=C$, $\alpha_1=ABA$, $\alpha_2=\varepsilon$ とすると、A→C
4. A→BとA→aはそのまま

4. B→C, B→b, C→B, C→cはそのまま

ε生成規則の消去例５

まとめると生成規則は以下のようになる。

S→S| ε

S→AB|A|B

A→ABAC|ABA|ABC|AAC|BAC|AB|AA|BA|AC|BC|A|B|C|a

B→C|b

C→B|c

鎖生成規則の消去

文脈自由文法 G=(N, Σ, P, S)に対して、以下の形の生成規則しかもたない L(G´)=L(G)なる G´= (N, Σ, P´, S)を構成できる。

(1) ε∈L(G)のときに限りS→ ε

(2) A→α (|α|≧2, α∈((N∪Σ)-{S})*

(3) A→α (α∈Σ)

鎖生成規則の消去法

$A \to B$ $(B \in N)$の形の生成規則の除去手順

1. $N_i(A)$　$(i \geqq 1)$を次のように与える。
   1. $N_1(A)=\{A\}$
   2. $N_{i+1}=N_i(A) \cup \{B \in N \mid$ ある$C \in N_i(A)$が存在して、$C \to B \in P\}$
2. P'を次のように与える。

   $P'=\{A \to \alpha \mid \exists B \in N_n(A)\ [B \to \alpha \in P$かつ$\alpha \notin N]\}$

   ここで、$n=|N|$。

鎖生成規則の消去例１

- $G=(N, \Sigma, P, S)$を次のように与える。

  $N=\{S, A, B, C\}$, $\Sigma=\{a, b, c\}$

  $P=\{S \to A, A \to AB|a, B \to C|b, C \to A|c\}$

  このとき

  $N_1(S)=\{S\}$, $N_2(S)=\{S, A\}=N_3(S)$

  $N_1(A)=\{A\}=N_2(A)$

  $N_1(B)=\{B\}$, $N_2(B)=\{B, C\}$, $N_3(B)=\{A, B, C\}=N_4(B)$

  $N_1(C)=\{C\}$, $N_2(C)=\{A, C\}=N_3(C)$

鎖生成規則の消去例２

- $B \to \alpha \in P$かつ$\alpha \in N$なBとα

  $\{(A, AB), (A, a), (B, b), (C, c)\}$

  $N_4(S)=\{S, A\}$からαは$\{AB, a\}$

  $N_4(A)=\{A\}$からαは$\{AB, a\}$

  $N_4(B)=\{A, B, C\}$からαは$\{AB, a, b, c\}$

  $N_4(C)=\{A, C\}$からαは$\{AB, a, c\}$

- $G'=(N, \Sigma, P', S)$は次のようになる。

  $N=\{S, A, B, C\}$, $\Sigma=\{a, b, c\}$

  $P=\{S \to AB|a, A \to AB|a, B \to a|b|c|AB, C \to a|c|AB\}$

Chomskyの標準形の構成法

CFL $G=(N, \Sigma, P, S)$に対して、
$L(G)$-$\{\varepsilon\}$を生成するChomsky標準形の
CFL $G'=(N', \Sigma, P', S')$を構成する。

1. GのS→ε 以外の生成規則の形を

   $A \to \alpha$ $(|\alpha| \geqq 2, \alpha \in ((N \cup \Sigma)\text{-}\{S\})^*$

   $A \to \alpha$ $(\alpha \in \Sigma)$

   であるとする。

Chomskyの標準形の構成法
つづき

2. $A \to X_1 \ldots X_k$　$(X_i \in (N \cup \Sigma)\text{-}\{S\}, k \geqq 2)$

   の形をした生成規則に対して、

   $X_i \in N$のとき$Y_i=X_i$とし、

   $X_i \in \Sigma$のとき新しく非終端記号Y_iを導入して、

   これを一旦

   $A \to Y_1 \ldots Y_k$, $Y_i \to X_i$

   で置き換える。そして、$A \to Y_1 \ldots Y_k$に対して、

   新たにk-2個の非終端記号$Z_1 \ldots Z_{k-2}$を導入して、

   $A \to Y_1 Z_1, Z_1 \to Y_2 Z_2, \ldots, Z_{k-2} \to Y_i Y_k$

   で置き換える。これは、Chomskyの標準形となる。

Chomskyの標準形の構成例

CFL $G=(N, \Sigma, P, S)$を以下とする。

$N=\{S, A\}$, $\Sigma=\{a\}$

$P=\{S \to AaAA, A \to a\}$

このGをChomsky標準形に直す。

$S \to Y_1Y_2Y_3Y_4$, $Y_1 \to A$, $Y_2 \to a$, $Y_3 \to A$, $Y_4 \to A$

$S \to Y_1Z_1$, $Z_1 \to Y_2Z_2$, $Z_2 \to Y_3Y_4$

$S \to AZ_1$, $Z_1 \to Y_2Z_2$, $Z_2 \to AA$

Chomskyの標準形の構成例
結果

Chomsky標準形　$G' = (N', \Sigma, P', S')$は

- $N' = \{S, A, Z_1, Z_2, Y_2\}$
- $P' = \{S \to AZ_1, Z_1 \to Y_2Z_2, Z_2 \to AA, Y_2 \to a, A \to a\}$

最後に

- ミニテストを提出してから帰ること
- 次回は、
  - 帰納的関数