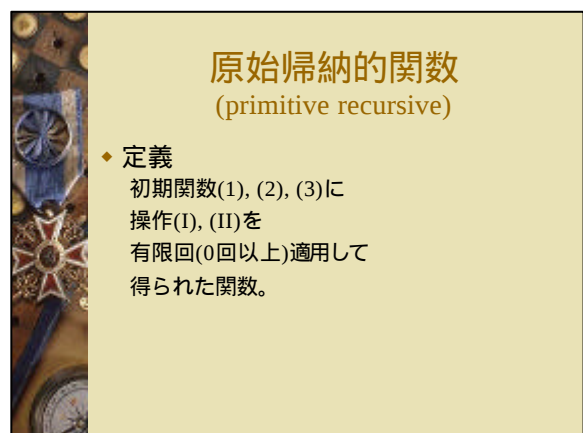
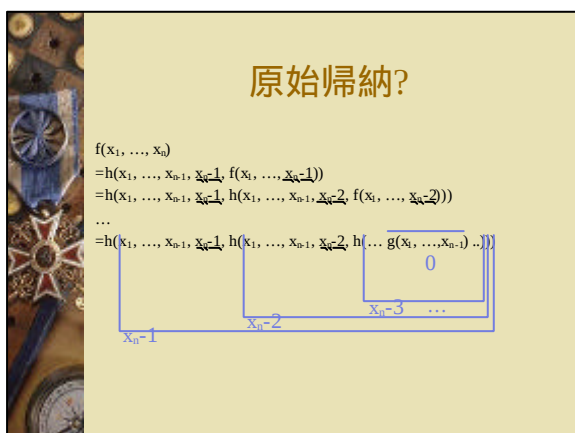
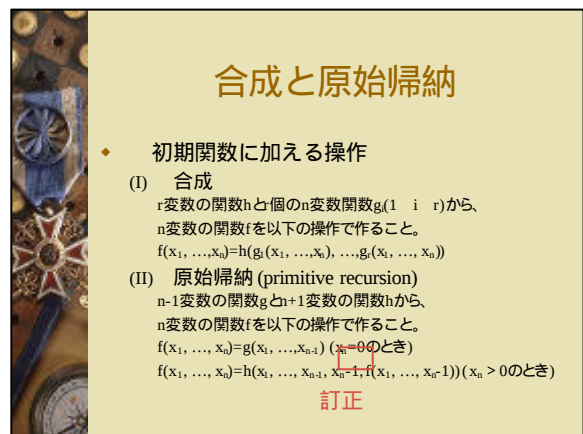
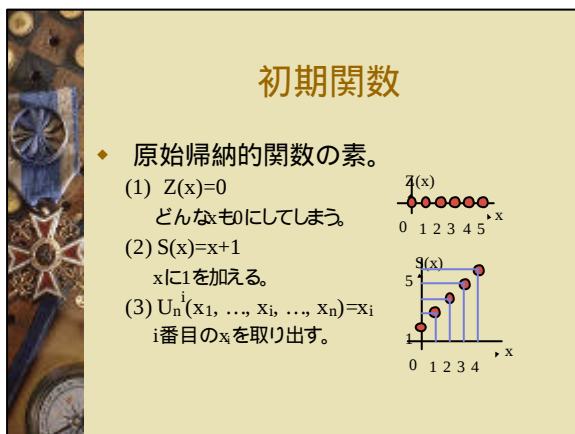
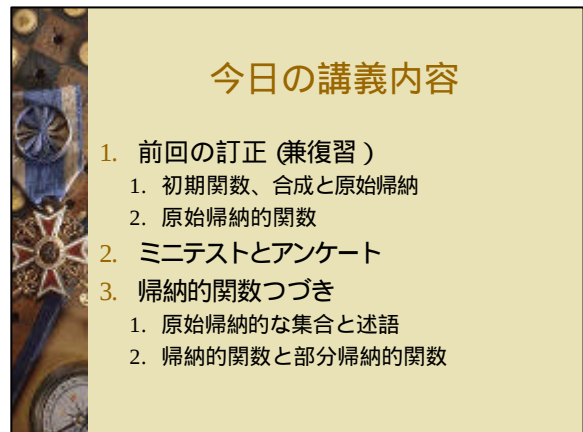




原始帰納的関数の例 (4)

(4) 定数関数 $C_n^k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = k$

なぜならば

$$C_n^k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ = S(S(\dots S(Z(U_n^1(x_1, \dots, x_n)))) \dots) = k$$

$\uparrow$ 0にk回1を加算
 $\uparrow$ xを1個取り出す (どれでも良い)
 $\uparrow$ 選ばれたxを0にする

$$C_5^3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = S(S(S(Z(U_5^4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))))) \\ = S(S(S(Z(x_4)))) = S(S(S(0))) = S(S(1)) = S(2) = 3$$

原始帰納的関数の例 (5)

(5) $x_1 + x_2$

$\text{plus}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ とおくと

$\text{plus}(x_1, x_2) = U_1^1(x_1)$ ($x_2 = 0$ のとき)

$\text{plus}(x_1, x_2) = S(U_3^3(x_1, x_2 - 1, \text{plus}(x_1, x_2 - 1)))$ ($x_2 > 0$ のとき)

$$\begin{aligned} \text{plus}(2, 4) &= S(U_3^3(2, 3, \text{plus}(2, 3))) = S(\text{plus}(2, 3)) \\ &= S(S(U_3^3(2, 2, \text{plus}(2, 2)))) = S(S(\text{plus}(2, 2))) \\ &= S(S(S(U_3^3(2, 1, \text{plus}(2, 1))))) = S(S(S(\text{plus}(2, 1)))) \\ &= S(S(S(S(U_3^3(2, 0, \text{plus}(2, 0))))) = S(S(S(S(\text{plus}(2, 0))))) \\ &= S(S(S(S(U_1^1(2)))))) = S(S(S(S(2)))) = S(S(S(3))) = S(S(4)) = S(5) = 6 \end{aligned}$$

原始帰納的関数の例 (6)

(6) $x_1 \cdot x_2$

$\text{times}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ とおくと

$\text{times}(x_1, x_2) = Z(x_1) = 0$ ($x_2 = 0$ のとき)

$\text{times}(x_1, x_2) = p(x_1, x_2 - 1, \text{times}(x_1, x_2 - 1))$ ($x_2 > 0$ のとき)

ここで、

$$p(x, y, z) = \text{plus}(U_3^1(x, y, z), U_3^3(x, y, z)) \\ = x + z$$

(6) の計算例

$$\begin{aligned} \text{times}(3, 4) &= p(3, 3, \text{times}(3, 3)) = 3 + \text{times}(3, 3) \\ &= 3 + p(3, 2, \text{times}(3, 2)) = 3 + 3 + \text{times}(3, 2) \\ &= 3 + 3 + p(3, 1, \text{times}(3, 1)) = 3 + 3 + 3 + \text{times}(3, 1) \\ &= 3 + 3 + 3 + p(3, 0, \text{times}(3, 0)) = 3 + 3 + 3 + 3 + \text{times}(3, 0) \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 + Z(3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 0 = 12 \end{aligned}$$

原始帰納的関数の例 (7)

(7) x^y

$\text{power}(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ とおくと $g(x_1)$

$\text{power}(x_1, x_2) = S(Z(x_1)) = 1$ ($x_2 = 0$ のとき)

$\text{power}(x_1, x_2) = p(x_1, x_2 - 1, \text{power}(x_1, x_2 - 1))$ ($x_2 > 0$ のとき)

ここで、

$$p(x, y, z) = \text{times}(U_3^1(x, y, z), U_3^3(x, y, z)) \\ = x \cdot z$$

原始帰納的関数の例 (8)

(8) $x_1!$

$\text{factorial}(x_1) = x_1!$ とおくと $g(k)$

$\text{factorial}(x_1) = S(Z(k)) = 1$ ($x_1 = 0$ のとき)

$\text{factorial}(x_1) = p(x_1 - 1, \text{factorial}(x_1 - 1))$ ($x_1 > 0$ のとき)

ここで、

$$p(x, y) = \text{times}(S(U_2^1(x, y)), U_2^2(x, y)) \\ = (x + 1) \cdot y$$

原始帰納的関数の例 (9)

(9) $pd(x_1)$ を

$$pd(x_1)=0 \quad (x_1=0 \text{ のとき})$$

$$pd(x_1)=x_1-1 \quad (x_1 > 0 \text{ のとき})$$

とおくと

$$pd(x_1)=Z(k)=0 \quad (x_1=0 \text{ のとき})$$

$$pd(x_1)=p(x_1-1, pd(x_1-1))=x_1-1 \quad (x_1 > 0 \text{ のとき})$$

ここで、

$$p(x, y) = U_2^1(x, y) = x$$

原始帰納的関数の例 (10)

(10) 自然数上での減算 $x_1 \dot{-} x_2$ を

$$x_1 \dot{-} x_2 = x_1 - x_2 \quad (x_1 \geq x_2 \text{ のとき})$$

$$x_1 \dot{-} x_2 = 0 \quad (x_1 < x_2 \text{ のとき})$$

とする。 $x_1 \dot{-} x_2 = n\text{-minus}(x_1, x_2)$ とおくと

$$n\text{-minus}(x_1, x_2) = U_1^1(x_1) \quad (x_2=0 \text{ のとき})$$

$$n\text{-minus}(x_1, x_2) = p(x_1, x_2-1, n\text{-minus}(x_1, x_2-1))$$

$$g(x_1) = pd(n\text{-minus}(x_1, x_2-1)) \quad (x_2 > 0 \text{ のとき})$$

ここで、

$$h(x_1, x_2-1, f(x_1, x_2-1))$$

$$p(x, y, z) = pd(U_3^3(x, y, z)) = pd(z)$$

原始帰納的関数の例 (11)

(11) 差の絶対値 $|x_1 - x_2|$ を

$$|x_1 - x_2| = x_1 - x_2 \quad (x_1 \geq x_2 \text{ のとき})$$

$$|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 \quad (x_1 < x_2 \text{ のとき})$$

とする。

$$|x_1 - x_2| = \text{abs-minus}(x_1, x_2)$$

$$= \text{plus}(n\text{-minus}(x_1, x_2), n\text{-minus}(x_2, x_1))$$

$$= x_1 \dot{-} x_2 + x_2 \dot{-} x_1$$

原始帰納的関数の例 (12)

(12) x の符号を表す関数

訂正 $sg(x_1)=0 \quad (x_1=0 \text{ のとき})$

$$sg(x_1)=1 \quad (x_1 > 0 \text{ のとき})$$

とすると

$$sg(x_1)=Z(k)=0 \quad (x_1=0 \text{ のとき})$$

$$sg(x_1)=S(Z(U_2^1(x_1-1, sd(x_1-1)))) \quad (x_1 > 0 \text{ のとき})$$

今日のミニテストとアンケート

(7) ~ (12) の計算練習

答えだけはダメ。

定義式に従って計算すること。

ただし、中に出てくる他の原始帰納関数の計算は省略して良い。

$$\text{times}(3, 4) = \dots$$

$$= 3+3+3+p(3, 0, \text{times}(3, 0)) = 3+3+3+\text{times}(3, 0)$$

$$= 3+3+3+Z(3) = 12+0 = 12$$

原始帰納的な集合と述語

特徴関数 C_S, C_P

集合 $S \subseteq N^n$

$$C_S(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad ((x_1, \dots, x_n) \notin S \text{ のとき})$$

$$C_S(x_1, \dots, x_n) = 1 \quad ((x_1, \dots, x_n) \in S \text{ のとき})$$

が原始帰納的であるとき、 S は原始帰納的集合。

述語 $P(x_1, \dots, x_n)$

$$C_P(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (\neg P(x_1, \dots, x_n) \text{ のとき})$$

$$C_P(x_1, \dots, x_n) = 1 \quad (P(x_1, \dots, x_n) \text{ のとき})$$

が原始帰納的であるとき、 P は原始帰納的述語。

原始帰納的集合の性質

集合 $S, R \subseteq N^n$ が原始帰納的であれば、
 $\bar{S} = N^n - S$
 $S \cup R$
 $S \cap R$
 も原始帰納的。
 → 証明

原始帰納的述語の性質 1

$P(x_1, \dots, x_r)$ を原始帰納的述語とし、
 $h_1, \dots, h_r$ を n 変数の原始帰納的関数とする。

このとき述語
 $P(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_r(x_1, \dots, x_n))$
 は原始帰納的。
 → 証明

原始帰納的述語の性質 2

$g_1, \dots, g_{m+1}$ を n 変数の原始帰納的関数とし、
 $P_1, \dots, P_m$ を n 変数の原始帰納的述語で、
 各 $(x_1, \dots, x_n)$ に対して高々1個の $P_i(x_1, \dots, x_n)$ が
 真になるものとする。

このとき関数
 $f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1, \dots, x_n) \quad (P_1(x_1, \dots, x_n) \text{ のとき})$
 $\dots$
 $f(x_1, \dots, x_n) = g_m(x_1, \dots, x_n) \quad (P_m(x_1, \dots, x_n) \text{ のとき})$
 $f(x_1, \dots, x_n) = g_{m+1}(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{それ以外のとき})$
 は原始帰納的。 → 証明

原始帰納的述語の性質 3

$P(x_1, \dots, x_n), Q(x_1, \dots, x_n)$ を
 原始帰納的述語とすれば、述語

$\neg P(x_1, \dots, x_n)$
 $P(x_1, \dots, x_n) \vee Q(x_1, \dots, x_n)$
 $P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, \dots, x_n)$
 $P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \dots, x_n)$
 $P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \dots, x_n)$
 は原始帰納的。 → 証明

原始帰納的述語の性質 4

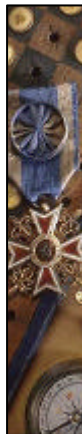
$P(x_1, \dots, x_n, y)$ を原始帰納的述語とすれば、
 述語

$(\exists y) < P(x_1, \dots, x_n, y)$
 $P(x_1, \dots, x_n, 0) \vee \dots \vee P(x_1, \dots, x_n, z-1)$
 $(\forall y) < P(x_1, \dots, x_n, y)$
 $P(x_1, \dots, x_n, 0) \wedge \dots \wedge P(x_1, \dots, x_n, z-1)$
 は原始帰納的。 → 証明

有界 μ 作用素

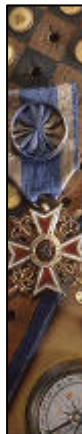
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して、
 $(\mu y) < P(x_1, \dots, x_n, y)$ を $n+1$ 変数の
 以下のような関数として定義する。

$(\mu y) < P(x_1, \dots, x_n, y)$
 $= \min \{ y \mid y < z \wedge P(x_1, \dots, x_n, y) \}$
 $((\exists y) < P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$
 $(\mu y) < P(x_1, \dots, x_n, y)$
 $= z$
 $(\neg (\exists y) < P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$



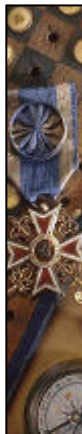
原始帰納的述語の性質 5

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が原始帰納的であれば
 $(\mu y)_{<Z} P(x_1, \dots, x_n, y)$ は原始帰納的である。
 → 証明



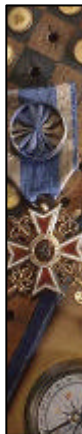
原始帰納的述語の性質 5

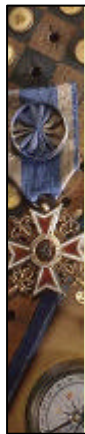
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が原始帰納的であれば
 $(\mu y)_{<Z} P(x_1, \dots, x_n, y)$ は原始帰納的である。
 → 証明



原始帰納的述語と関数の例 1

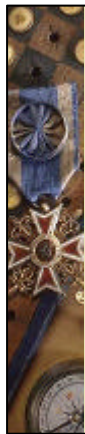
- (13) 述語 $x=y$
- (14) 述語 $x < y$
- (15) 述語 $x \leq y$
- (16) 関数 $\max(x, y)$
- (17) 関数 $\min(x, y)$
- (18) 関数 $\max(x_1, \dots, x_n)$
- (19) 述語 $x|y$ (x は y を割り切る)
- (20) 述語 $P_r(x)$ (x は素数である)

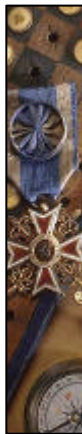
- 
- # 原始帰納的述語と関数の例 1
- (13) 述語 $x=y$
 - (14) 述語 $x < y$
 - (15) 述語 $x \leq y$
 - (16) 関数 $\max(x, y)$
 - (17) 関数 $\min(x, y)$
 - (18) 関数 $\max(x_1, \dots, x_n)$
 - (19) 述語 $x|y$ (x は y を割り切る)
 - (20) 述語 $P_r(x)$ (x は素数である)



原始帰納的述語と関数の例 2

- (21) 述語 x/y (x を y で割ったときの商)
- (22) 第 $n+1$ 番目の素数を表す関数 p_n
- (23) 関数
 - $l(a)=a$ の素因数分解における0でない数の個数
($a \neq 0$ のとき)
 - $l(a)=0$ ($a=0$ のとき)
- (24) a との関数
 - $(a)=a$ の素因数分解における p_i のべき数 ($a \neq 0$ のとき)
 - $(a)=0$ ($a=0$ のとき)

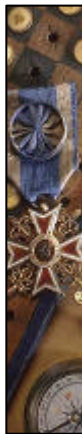
- 
- # 原始帰納的述語と関数の例 2
- (21) 述語 x/y (x を y で割ったときの商)
 - (22) 第 $n+1$ 番目の素数を表す関数 p_n
 - (23) 関数
 - $l(a)=a$ の素因数分解における0でない数の個数
($a \neq 0$ のとき)
 - $l(a)=0$ ($a=0$ のとき)
 - (24) a との関数
 - $(a)=a$ の素因数分解における p_i のべき数 ($a \neq 0$ のとき)
 - $(a)=0$ ($a=0$ のとき)

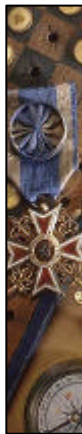


原始帰納的述語と関数の例 3

(25) 関数

$$x \circ y = x \bullet \prod_{i \triangleleft (y)} p_{l(x)+i}^{(y)_i}$$

- 
- # 原始帰納的述語と関数の例 3
- ## (25) 関数
- $$x \circ y = x \bullet \prod_{i \triangleleft (y)} p_{l(x)+i}^{(y)_i}$$



原始帰納的述語と関数の例 3

(25) 関数

$$x \circ y = x \bullet \prod_{i \triangleleft (y)} p_{l(x)+i}^{(y)_i}$$

μ 作用素

(μ-operator)

n+1 変数の述語から n 変数の関数を作る操作

定義

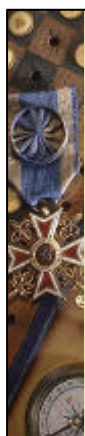
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して

$$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y) \\ = \min\{y \mid P(x_1, \dots, x_n, y)\} \\ ((\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$$

$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y)$

= 無定義

($\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき)



μ 作用素

(μ-operator)

n+1 変数の述語から n 変数の関数を作る操作

定義

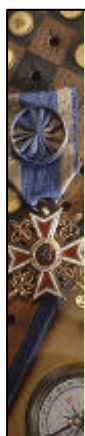
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して

$$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y) \\ = \min\{y \mid P(x_1, \dots, x_n, y)\} \\ ((\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$$

$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y)$

= 無定義

($\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき)



μ 作用素

(μ-operator)

n+1 変数の述語から n 変数の関数を作る操作

定義

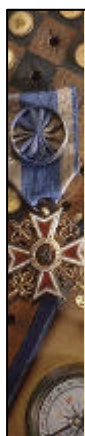
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して

$$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y) \\ = \min\{y \mid P(x_1, \dots, x_n, y)\} \\ ((\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$$

$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y)$

= 無定義

($\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき)



μ 作用素

(μ-operator)

n+1 変数の述語から n 変数の関数を作る操作

定義

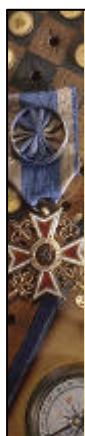
述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して

$$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y) \\ = \min\{y \mid P(x_1, \dots, x_n, y)\} \\ ((\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$$

$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y)$

= 無定義

($\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき)



μ 作用素

(μ-operator)

n+1 変数の述語から n 変数の関数を作る操作

定義

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ に対して

$$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y) \\ = \min\{y \mid P(x_1, \dots, x_n, y)\} \\ ((\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y) \text{ のとき})$$

$\mu y P(x_1, \dots, x_n, y)$

= 無定義

($\neg y) P(x_1, \dots, x_n, y)$ のとき)



正則

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $P(x_1, \dots, x_n, y)$ を真とする y が存在する。

関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $g(x_1, \dots, x_n, y)=0$ となる y が存在する。



正則

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $P(x_1, \dots, x_n, y)$ を真とする y が存在する。

関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $g(x_1, \dots, x_n, y)=0$ となる y が存在する。



正則

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $P(x_1, \dots, x_n, y)$ を真とする y が存在する。

関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $g(x_1, \dots, x_n, y)=0$ となる y が存在する。



正則

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $P(x_1, \dots, x_n, y)$ を真とする y が存在する。

関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $g(x_1, \dots, x_n, y)=0$ となる y が存在する。



正則

述語 $P(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $P(x_1, \dots, x_n, y)$ を真とする y が存在する。

関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ が正則

= 任意の $(x_1, \dots, x_n)$ に対して $g(x_1, \dots, x_n, y)=0$ となる y が存在する。

2つの新操作

(III) 全域的であることが保証されない。
関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ から関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を
以下の操作で作る。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$$

(III') 全域的であることが保証される。

正則 関数 $g(x_1, \dots, x_n, y)$ から関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を
以下の操作で作る。

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$$

部分帰納的関数と帰納的関数

部分帰納的(partial recursive)関数

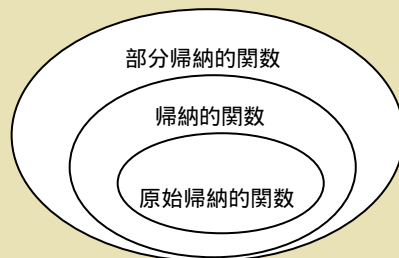
初期関数(1), (2), (3)に操作(I), (II), (III)を
有限回適用して定義された関数。

帰納的(recursive)関数

(一般帰納的(general recursive)関数)

初期関数(1), (2), (3)に操作(I), (II), (III')を
有限回適用して定義された関数。

各関数の関係



最後に

- ◆ ミニテストを提出してから帰ること
- ◆ 次回こそは、
 - Turing機械