

動作の例

1. $p01Rq$
($p, 0$) = ($1, R, q$)
2. $q11Lr$
($q, 1$) = ($1, L, r$)
3. $r10Np$
($r, 1$) = ($0, N, p$)

計算状況

$a_1 \dots a_{i-1} p a_i \dots a_n$
Turing機械 M が以下のような状態なとき

テープ上の記号列の状態

計算状況の例

0. 初期状態
 $0p01100$
1. $p01Rq$
 $01q1100$
2. $q11Lr$
 $0r11100$
3. $r10Np$
 $0p01100$

M

M ((M) ,) の定義

次のいずれかが成立する

- (1) $= a_1 \dots a_{i-1} q a_i \dots a_n, p a_i a_i \ N q \ K$
- (2) $= a_1 \dots a_{i-1} a_i \ q a_{i+1} \dots a_n, p a_i a_i \ R q \ K$
ただし、 $i=n$ のときは、 $= a_1 \dots a_{i-1} \ q B$
- (3) $= a_1 \dots a_{i-2} q a_{i-1} a_i \dots a_n, p a_i a_i \ L q \ K$
ただし、 $i=1$ のときは、 $= q B a_1 \dots a_{i-1} a_n$

停止 (halt)

定義

計算状況 に対して、 M となる が存在しないとき、Turing機械は計算状態 で停止している。

M の反射的推移閉包

$*M$ または $*$
 M の繰り返し

$0p01100 \ M \ 01q1100 \ M \ 0r11100$

$0p01100 \ *M \ 0r11100$

計算 (computation)

0 に始まり r に終わるMによる計算
 Turing機械M
 計算状態の列 $0, 1, \dots, r$
 各 $i(0 \leq i < r)$ に対して $i \xrightarrow{M} i+1$ であり、
 $i \xrightarrow{M} i+1$ は $(u, v, *, q_h, F)$

数の符号化

数値計算
 数や数の組を符号化する必要がある
 符号化の例
 1 とする
 数 x に対して、
 $x = 11\dots1 = 1^{x+1}$
 n 個の数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) に対して、
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 B x_2 B \dots B x_n$

部分的に計算可能 (partially computable)

関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が部分的に計算可能
 = 次のような Turing機械 $M=(Q, \dots, K, q_0, F)$ が存在する。
 (1) 任意の $(x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ に対して、
 $(x_1, \dots, x_n) q_0 B \dots B M(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) q_h B$
 となる $q_h \in F$ が存在する。
 (2) $(x_1, \dots, x_n) \notin D(f)$ であれば、
 $(x_1, \dots, x_n) q_0 B$ に始まるMによる計算が存在しない。

計算可能 (partially computable)

- 関数 f がMにより部分的に計算可能
 Mは f を部分的に計算する。
- 関数 f が全域的かつ部分的に計算可能
 計算可能
 Mは f を計算する。

Turing機械の例 $S(x)$

Turing機械 $M=(Q, \dots, K, q_0, F)$
 $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$
 $=\{B, 1\}$
 $F=\{q_8\}$
 $K=\{q_0 B B L q_1, q_1 1 B R q_2, q_1 B B R q_6, q_2 1 1 R q_2,$
 $q_2 B B R q_3, q_3 1 1 R q_3, q_3 B 1 L q_4, q_4 1 1 L q_4,$
 $q_4 B B L q_5, q_5 1 1 L q_5, q_5 B 1 L q_1, q_6 1 1 R q_6,$
 $q_6 B B R q_7, q_7 1 1 R q_7, q_7 B 1 R q_8\}$

$S(2)$ の計算

— —

111q₀B *B111B1111q₈B=B2BS(2)q₈B

Turing機械の作り方

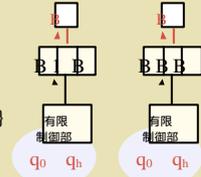
Turing機械を合成して作る

1. 単純なTuring機械
 $B = \langle \{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\} \rangle$
2. 基本的なTuring機械
 R, L, R, T, S, C, K_n
3. 初期関数とTuring機械
 $Z(x), S(x), U_n^i(x_1, \dots, x_n)$

Turing機械 B

ヘッドが置かれてい
ます目に空白記号Bを
書き込む。

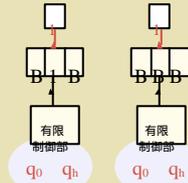
$B = \langle \{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\} \rangle$
 $K = \{ q_0 1 B N q_h, q_0 B B N q_h \}$



Turing機械 1

ヘッドが置かれてい
ます目に1を書き込む。

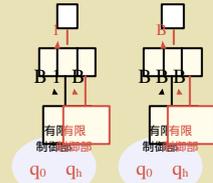
$B = \langle \{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\} \rangle$
 $K = \{ q_0 1 1 N q_h, q_0 B 1 N q_h \}$



Turing機械 r

ヘッドを1こま右へ移す。

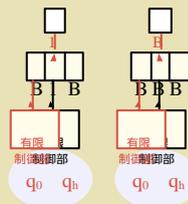
$B = \langle \{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\} \rangle$
 $K = \{ q_0 1 1 R q_h, q_0 B B R q_h \}$



Turing機械 l

ヘッドを1こま左へ移す。

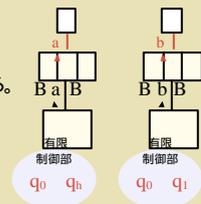
$B = \langle \{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\} \rangle$
 $K = \{ q_0 1 1 L q_h, q_0 B B L q_h \}$



Turing機械 <a>

読み取られた記号がaで
あるか否かを判定する。

aであれば q_h で停止し、
aでなければ q_1 で停止する。
 $B = \langle \{q_0, q_1, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_1, q_h\} \rangle$
 $K = \{ q_0 a a N q_h, q_0 b b N q_1 \}$
 ここで、a b



合成

2つのTuring機械

$M_1=(Q_1, \quad, K_1, q_0^1, F_1), M_2=(Q_2, \quad, K_2, q_0^2, F_2)$
 $Q_1, Q_2 = \quad$ と仮定できる。

(できない場合は状態の名前を付け替える)

q, F_1 と q_0^2, Q_2 を同一視して得られる

以下のTuring機械

$M_1 \xrightarrow{q} M_2 = (Q_1 \cup Q_2, \quad, K, q^1, F_1 \cup F_2 - \{q\})$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{qaaNq_0^2 | a \quad\}$

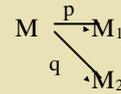
を q における M_1 と M_2 の **結合** と呼ぶ。

結合のバリエーション

Turing機械 M, M_1, M_2

$(Q, \quad, K, q_0, F - \{q\})$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{qaaNq_0^1 | a \quad\}$



$(Q = Q_1 \cup Q_2, \quad, K, q_0, F = F_1 \cup F_2 - \{p, q\})$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{paaNq_0^1, qbbNq_0^2 | a, b \quad\}$

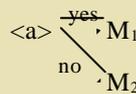
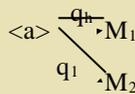
簡易表記

$F_1 = \{q\}$ であるとき、

単に $M_1 M_2$ と書ける。 $M_1 \xrightarrow{q} M_2 \quad M_1 M_2$

M が $\langle a \rangle$ のとき、

q_h, q_1 を yes, no のように書ける。



Turing機械 R

ヘッドの右側にある最初の

Bを探し、そこで止まる。

Turing機械 r と $\langle B \rangle$ から合成。

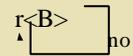
$r = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$

$K_1 = \{q_0 B B r q_h, q_0 1 1 r q_h\}$

$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0,$

$\{p_1, p_h\})$

$K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_h 1 1 N p_1\}$



Turing機械 R つづき

$R = (Q, \{B, 1\}, K, q_0, F)$

$Q = \{q_0, q_h\} \quad \{p_0, p_1, p_h\} = \{q_0, q_h, p_0, p_1, p_h\}$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$

$= \{q_0 B B r q_h, q_0 1 1 r q_h, p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1,$

$q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$

$F = \{q_h\} \quad \{p_1, p_h\} - \{q_h\} - \{p_1\} = \{p_h\}$

Turing機械 L

ヘッドの左側にある最初の

Bを探し、そこで止まる。

Turing機械 l と $\langle B \rangle$ から合成。

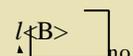
$l = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$

$K_1 = \{q_0 B B L q_h, q_0 1 1 L q_h\}$

$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0,$

$\{p_1, p_h\})$

$K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_h 1 1 N p_1\}$



Turing機械 L つづき

$R = (Q, \{B, 1\}, K, q_0, F)$
 $Q = \{q_0, q_h\}$ $\{p_0, p_1, p_h\} = \{q_0, q_h, p_0, p_1, p_h\}$
 $K = K_1 \ K_2 \ \{q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$
 $= \{q_0 B B L q_h, q_0 1 1 L q_h, p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1, q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$
 $F = \{q_h\}$ $\{p_1, p_h\} - \{q_h\} - \{p_1\} = \{p_h\}$

Turing機械 R

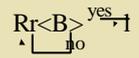
ヘッドの右側にある最初の連続したBBを探し、その左側のBの位置で止まる。

Turing機械Rと $\langle B \rangle$ から合成。

$r = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$
 $K_1 = \{q_0 B B R q_h, q_0 1 1 R q_h\}$

$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0, \{p_1, p_h\})$
 $K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1\}$

$R = (Q, \{B, 1\}, K, q, F)$



Turing機械 T

1の連続したかたまりを1こまづつ左へ移す。

$\sim B W B \xrightarrow{*} T \sim W B B$

ここで

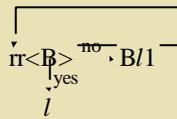
~ 任意の記号

W : 1の連続したかたまり

~ (下線) : ヘッドの位置

$\sim B W B = q_0 \sim B W B$

$\sim W B B = \sim W q_h B B$



Tの計算例

$\sim B 1 1 B$

* $\sim B 1 1 B (rr \langle B \rangle)$

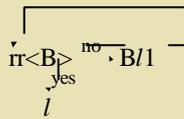
* $\sim 1 B 1 B (B/1)$

* $\sim 1 B 1 B (rr \langle B \rangle)$

* $\sim 1 1 B B (B/1)$

* $\sim 1 1 B B (rr \langle B \rangle)$

* $\sim 1 1 B B (l)$



Turing機械 S

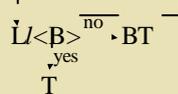
1のかたまり W_1, W_2 に対して以下の処理を行う。

$B W_1 B W_2 B \xrightarrow{*} S B W_2 B B \dots B$

ここで

W_1, W_2 : 1の連続したかたまり

~ (下線) : ヘッドの位置



Sの計算例

$B 1 1 B 1 1 1 B$

* $B 1 1 B 1 1 1 B (ll \langle B \rangle)$

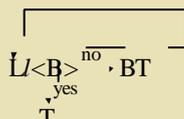
* $B 1 B 1 1 1 B B (BT)$

* $B 1 B 1 1 1 B B (ll \langle B \rangle)$

* $B B 1 1 1 B B B (BT)$

* $B B 1 1 1 B B B (ll \langle B \rangle)$

* $B 1 1 1 B B B B (T)$



Turing機械 C

1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n, W に対して
以下の処理を行う。
 $\sim BBW_1BW_2B \dots BW_nBW \underline{B} \quad * \sim BW \underline{B} B \dots B$

$$\begin{array}{c} \boxed{L \langle B \rangle \xrightarrow{\text{no}} rRS} \\ \downarrow \text{yes} \\ TL/T \end{array}$$

Cの計算例

$$\begin{array}{c} \boxed{L \langle B \rangle \xrightarrow{\text{no}} rRS} \\ \downarrow \text{yes} \\ TL/T \end{array}$$

- * $\sim BB11B1B111B \ (L \langle B \rangle)$
- * $\sim BB11B111\underline{B}BB \ (rRS)$
- * $\sim BB11\underline{B}111BBB \ (L \langle B \rangle)$
- * $\sim BB111\underline{B}BBBBB \ (rRS)$
- * $\sim \underline{B}B111BBBBB \ (L \langle B \rangle)$
- * $\sim 111\underline{B}BBBBBB \ (TL/T)$

Turing機械 K_n

n 個の1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n に対して
以下の処理を行う。
 $BW_1BW_2B \dots BW_n \underline{B} \quad * \text{kn} BW_1BW_2B \dots BW_n BW_1 \underline{B}$

$$\begin{array}{c} \boxed{L^n r \langle B \rangle \xrightarrow{\text{no}} BR^{n+1} / L^{n+1} 1} \\ \downarrow \text{yes} \\ R^n \end{array}$$

K_n の計算例 ($n=2$ の場合)

$$\begin{array}{c} \boxed{L^n r \langle B \rangle \xrightarrow{\text{no}} BR^{n+1} / L^{n+1} 1} \\ \downarrow \text{yes} \\ R^n \end{array}$$

- * $B11B111\underline{B} \quad (L^2 r \langle B \rangle)$
- * $BB1B111B \underline{1} \quad (BR^3)$
- * $B11B111B1 \quad (L^3)$
- * $B11\underline{B}111B1 \quad (r \langle B \rangle)$
- * $B1BB111B1 \underline{1} \quad (BR^3)$
- * $B11B111B11 \quad (L^3)$
- * $B11\underline{B}111B11 \quad (r \langle B \rangle)$
- * $B11B111B11\underline{B} \quad (R^2)$

初期関数のTuring機械

$Z(x)$
 $r1r \quad BW \underline{B} \quad * \quad BWB1 \underline{B}$

$S(x)$
 $K_1 1r \quad BW \underline{B} \quad * \quad BWBW1 \underline{B}$

$U_n^i(x_1, \dots, x_n)$
 K_{n+1}
 $BW_1 B \dots BW_i B \dots BW_n \underline{B} \quad * \quad BW_1 B \dots BW_i B \dots BW_n BW_i \underline{B}$

最後に

- ◆ ミニテストを提出してから帰ること
- ◆ 次回は、
Turing機械と帰納的関数が同じであるという話
...をできるといいな。