

計算の理論 I

— 数学的概念と記法 —

月曜3校時
大月 美佳

集合

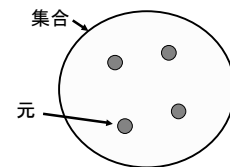
(1.2節 pp. 6~8)

w 集合(set)

– なんらかの対象をいくつか(重複なしに)集めたもの

w 元(member)

– 集められた対象



部分集合、真部分集合

w AがBの部分集合 = AがBに含まれる

– $\therefore A$ のすべての元がBの元

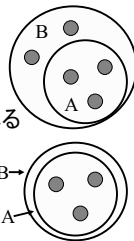
w 真部分集合 $A \subset B$

– $\therefore A \subseteq B$ かつ $A \neq B$

– Aのすべての元はBに含まれる

– Aの元でないBの元がある

w $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B = A = B$



集合の記述法

w 元を列挙する

– $\{0, 1\}$ $\{\text{dog, cat}\}$

w 元が満たす条件を記述する

– $\{x | P(x)\}$

$\therefore$ 「 $P(x)$ が真であるようなxの集合」

w 元が所属する集合も書く

– $\{x \in A | P(x)\}$

$\therefore$ 「 $P(x)$ が真であるようなAの元xの集合」

$= \{x | P(x) \text{ かつ } x \in A\}$

集合の演算(の一部)

1. 和 (union) : $A \cup B$
2. 共通部分 (intersection) : $A \cap B$
3. 差 (difference) : $A - B$
4. 直積 (Cartesian product) : $A \times B$
5. ベキ集合 (power set) : 2^A

和 (union)

w $A \cup B$

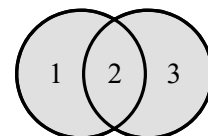
$= \{x | x \text{ は } A \text{ または } B \text{ の元である}\}$

w 例

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$

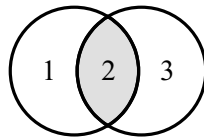


共通部分 (intersection)

$w A \cap B$
 $= \{ x | x \text{は} A \text{の元かつ} B \text{の元} \}$

例

$A = \{ 1, 2 \}$
 $B = \{ 2, 3 \}$
 $A \cap B = \{ 2 \}$

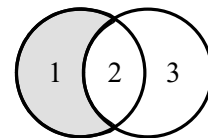


差 (difference)

$w A - B$
 $= \{ x | x \text{は} A \text{の元で} B \text{の元ではない} \}$

例

$A = \{ 1, 2 \}$
 $B = \{ 2, 3 \}$
 $A - B = \{ 1 \}$

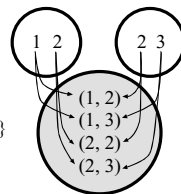


直積 (Cartesian product)

$w A \times B$
 $= \{ (x, y) | x \text{は} A \text{の元で} y \text{は} B \text{の元} \}$

例

$A = \{ 1, 2 \}$
 $B = \{ 2, 3 \}$
 $A \times B$
 $= \{ (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) \}$
 A が n 個で B が m 個のとき、
 $A \times B$ は nm 個

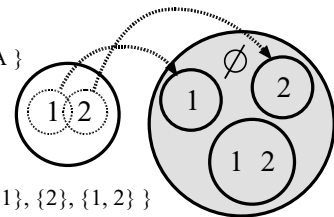


ベキ集合 (power set)

$w 2^A$
 $= \{ B | B \subseteq A \}$

例

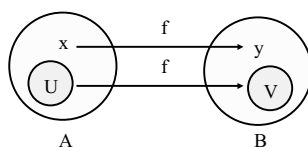
$A = \{ 1, 2 \}$
 $2^A = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$
 A が n 個のとき、 2^A は 2^n 個



写像 (projection?)

線形代数

写像 $f: f(x) = \{y\}, f(U) = V$



濃度 (cardinality)

等しい濃度

$:=$ 集合 S_1 と S_2 について、 S_1 から S_2 の上へ 1 対 1 の写像がある

有限集合

$S_1 \subseteq S_2$ ならば異なる濃度

無限集合

$S_1 \subseteq S_2$ でも等しい濃度の場合がある

真部分集合な無限集合 (等しい濃度)

例

- S_1 : 偶数全体
 - S_2 : 整数全体
- 1対1写像 $\rightarrow f(2i)=i$

S_1	$-\infty$	...	-2	0	2	...	$2i$	...	∞
	↓		↓	↓	↓		↓		↓
S_2	$-\infty$	...	-1	0	1	...	i	...	∞

真部分集合な無限集合 (異なる濃度)

例

- S_1 : 整数全体
 - S_2 : 実数全体
- 1対1写像 $\rightarrow f(2i)=i$

証明

対角線論法(diagonalization)

正しくないことを示したい命題P

1. Pを正しいと仮定
2. 仮定から例を導き出す
3. 2の例がPを満たさないことを示す

証明例 (p. 8)

1. S_1 (整数全体)と S_2 (実数全体)が1対1対応していると仮定
2. 例として次のような数を考える
「各 $i=1, 2, 3, \dots$ について、第 i 番目の実数(1の対応で正整数 i に対応づけられた実数)の小数点以下 i 桁目の数字に、法10のもとで5を加えた数字が、小数点以下 i 桁目であるような実数」
3. これは1を満たさない

x_1	=	x_{10}	.	x_{11}	x_{12}	...	x_{1i}	...	$x_{1\infty}$
x_2	=	x_{20}	.	x_{21}	x_{22}	...	x_{2i}	...	$x_{2\infty}$
x_3	=	x_{30}	.	x_{31}	x_{32}	...	x_{3i}	...	$x_{3\infty}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
x_i	=	x_{i0}	.	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ii}	...	$x_{i\infty}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
x_{∞}	=	$x_{\infty 0}$	.	$x_{\infty 1}$	$x_{\infty 2}$	...	$x_{\infty i}$	...	$x_{\infty \infty}$
y	=	y_0	.	$x_{11} + 0.5$	$x_{22} + 0.05$		$x_{ii} + 5 \times 10^{-i}$		$x_{\infty \infty} + 5 \times 10^{-\infty}$

可算無限

例 可算無限 (countably many)

= 加算(countable)

:= 正整数と1対1に対応づけられる集合

例

- 有理数の集合
- 空でないアルファベット Σ 上の(有限長の)記号列の集合 Σ^*
- × Σ^* のべき集合 $\leftarrow$ 実数の集合と同じ濃度を持つ
- × 整数から $\{0, 1\}$ への関数の集合 $\leftarrow$

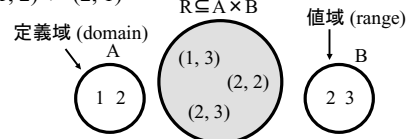
関係

例 (2項)関係 (binary relation)

:= 順序対の集合

例 順序対 (順序がある対(pair, 組))

$(1, 2) \neq (2, 1)$



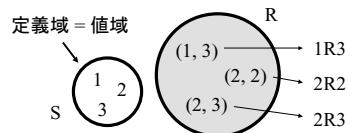
Sの上の関係

w Sの上の関係 (relation on S)

定義域と値域が同じ集合Sである場合の関係

w aRb

$:= (a, b)$ が関係Rに属する



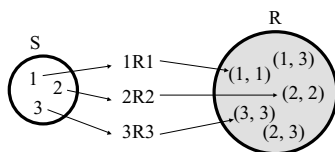
関係の性質

1. 反射的 (reflexive)
2. 非反射的 (irreflexive)
3. 推移的 (transitive)
4. 対称的 (symmetric)
5. 非対称的 (asymmetric)

反射的

w 反射的 (reflexive)

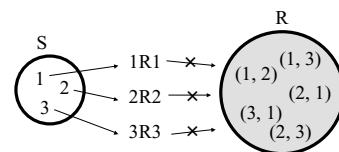
$:= S$ の各元 a について aRa



非反射的

w 非反射的 (irreflexive)

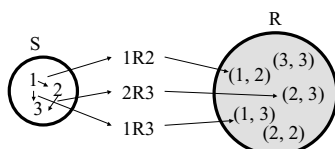
$:= S$ の各元 a について aRa が成り立たない



推移的

w 推移的 (transitive)

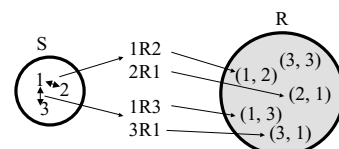
$:= aRb$ かつ bRc のとき常に aRc



対称的

w 対称的 (symmetric)

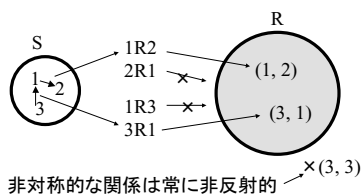
$:= aRb$ のとき常に bRa



非対称的

W 非対称的 (asymmetric)

$\therefore aRb$ のとき bRa が決して成り立たない



関係の性質の例

(例1.3 p. 9)

W 整数上の大小関係 <

– 推移的

$a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$

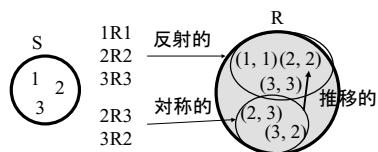
– 非対称的

$a < b$ ならば $b < a$ には決してならない
したがって非反射的でもある

同値関係

W 同値関係 (equivalence relation)

$\therefore$ 反射的、対称的、かつ推移的である関係



同値類

W 同値類 (equivalence class)

$\therefore$ 次の性質を持つ部分集合 S_i

1. $S_i \neq \emptyset$, かつ $i \neq j$ ならば $S_i \cap S_j = \emptyset$
2. S_i の各元 a, b に対して aRb
3. $i \neq j$ のとき S_i の各元 a と S_j の各元 b に対して aRb は成り立たない

W S は S_i の和 $\cup S_i$ として表される

同値関係の例

(例1.4 pp. 9~10)

W 法 m に関する合同 (congruence module m)

$\therefore i-j$ が m で割り切れること

$\therefore i \equiv_m j$ または $i \equiv j \pmod{m}$

反射的: 任意の a について $a-a$ は m で割り切れる

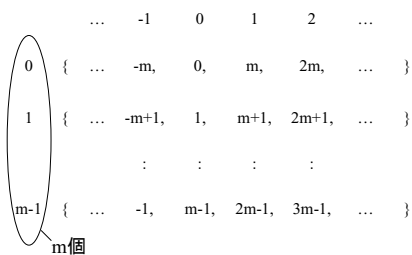
推移的: $a \equiv_m b$ かつ $b \equiv_m c$ ならば, $a \equiv_m c$

$a = m \times x + b, b = m \times y + c \rightarrow a = m \times (x+y) + c$

対称的: $a \equiv_m b$ ならば $b \equiv_m a$

$a - b = m \times x \rightarrow b - a = m \times (-x)$

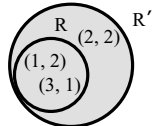
整数全体の $\equiv_m$ による同値類



関係の閉包

W R の G 閉包 (G - closure)

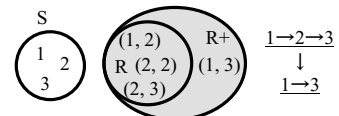
G: 関係に関するいくつかの性質の集まり
ある関係 R を部分集合として含み、
かつ G のすべての性質を有する最小の関係 R'



推移的閉包

W 推移的閉包 (transitive closure)

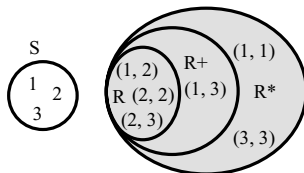
- R を含む最小の推移関係 R+
- 1. (a, b) が R の元ならば、(a, b) は R+ の元
- 2. (a, b) が R+ の元で (b, c) が R の元ならば (a, c) は R+ の元
- 3. 1 と 2 で示したもの以外に R+ の元はない



反射的かつ推移的閉包

W R の反射的かつ推移的閉包: R*

$$= R+ \cup \{ (a, a) | a \in S \}$$



最後に

W ミニテスト

- テスト時間: 15分
- 終了後横と交換、解答採点
- 提出してから帰ること

W 次回は、

- 言語とオートマトン

W 履修カードを出して帰ること

グラフ

(1.2節 pp. 2~5)

W どんなときに使うのか?

- 状態遷移図
- 文法木
- 各種アルゴリズムのデータ構造
- その他いろいろ

グラフの定義

W グラフ $G=(V, E)$

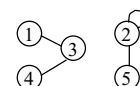
V: 有限個の頂点 (vertex, node) の集合

E: 頂点の対 $((v_1, v_2)$ と表記) で示される辺 (edge) の集合

W 例 (図 1.1 p.3)

$V=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E=\{(n, m) | n+m=4 \text{ または } n+m=7\}$



道

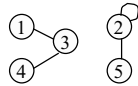
w 道 (path)、路

- グラフのある頂点の列 $v_1, v_2, \dots, v_k$ ($k \geq 1$) が道であるというのは、
- $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ がいずれも辺であるということ

w 閉路 (cycle) : $v_i = v_k$ のとき

w 道の例 (図1.1 p.3)

- 1, 3, 4
- 2
- 2, 5



有向グラフ

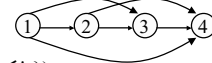
w 有向グラフ (directed graph, digraph) G

- $G = (V, E)$
- E の要素が有向辺 (arc)
- $v \rightarrow w$: v から w へ向かう有向辺

前者 (predecessor) 後者 (successor)

w 例 (図1.2 p.3)

- $\{1, 2, 3, 4\}, \{i \rightarrow j \mid i < j\}$



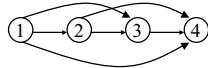
有向グラフの道

w 有向グラフの道 (path)

$v_i \rightarrow v_{i+1}$ ($1 \leq i < k$) が有向辺であるような頂点の列 $v_1, v_2, \dots, v_k$ (ただし、 $k \geq 1$)

w 例 (図1.2 p.3)

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$: 1 から 4 への道



木

w 木 (tree, ordered directed tree)

次の性質を持つ有効グラフ

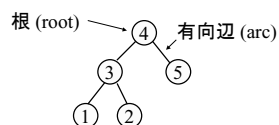
1. 前者を持たず、各頂点への道が必ず存在する根 (root) と呼ばれる頂点を一つ持つ
2. 根以外の頂点はそれぞれただ一つ前者を持つ
3. 各頂点の后者は左から右へ一列に順序つけられている

木の書き方

w 根を上、各有向辺を下に向けて書く

w 有向辺の矢印は書く必要がない

w 頂点は(なんらかの)順序に従って左から右に書く



木特有の用語

w 親 (parent, father?) : 前者

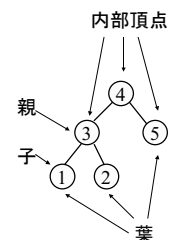
w 子 (child, son?) : 後者

w 葉 (leaf) : 子を持たない頂点

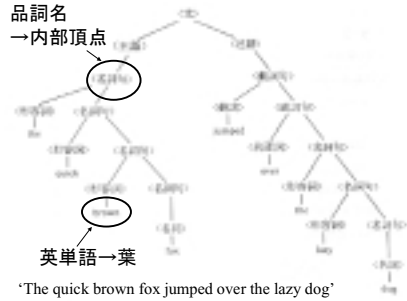
w 内部 (interior) 頂点 : 葉でない頂点

w 先祖 (ancestor) と子孫 (descendant)

- 頂点 v_i から v_j への道があるとき (v_i : 先祖、 v_j : 子孫)
- 各頂点は自分自身の先祖かつ子孫



構文木
(例1.3 p.4)



記号・記号列

W 記号

$\coloneqq$ 定義なし

(例) $a, b, c, \dots, 1, 2, \dots$

w 記号列 (string)=語(word)

:=記号を有限個並べてできる列

(例) abc, cba, a1, 2c

$$w \quad |w|$$

$l(w)$:= 記号列 w の長さ (length)

(例) $abcb$ の長さ $= |abcb| = 4$

$$w \text{ 空列} = \varepsilon$$

- ε := 長さが0 ($|\varepsilon| = 0$) の記号列

接頭語・接尾語

w 接頭語(prefix)

$$:= \text{記号列}(w) \text{の先頭文字列 (長さは } 0 \sim |w|)$$

(例) abc の接頭語 = $\{\varepsilon, a, ab \mid abc\}$

w 接尾語(postfix)

:= 記号列(w)の末尾文字列(長さは $0 \sim |w|$)

(例) abcの接尾語 = $\{\epsilon, c, bc, abc\}$

真の (proper) 接頭語／接尾語

記号列の連接

W 連接(concatenation)

:=2つの記号列をつなぐ演算

(例) dogとhouseの接続=doghouse

W 演算記号

なし

記号列 w と x の接続 $=wx$

$$w \text{ 单位元} = \varepsilon$$
$$\varepsilon w = w \varepsilon = w$$

アルファベットと言語

w アルファベット(alphabet)

Σ := 空ではない記号の有限集合

(例) $\{q, z, 1\} \{0\}$

(×) 空集合、無限個の記号の集合

w 言語(language, formal language)

アルファベットに属する記号からなる列の集合
(例) 空集合、 $\{\varepsilon\}$

言語

○ アルファベット $\{0,1\}$ 上の回文 (palindrome)

要素は無限個

$$\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 010, 11011, \dots$$

×「無限個の記号」上の有限個の回文

アルファベット(記号が有限)上ではない

○ アルファベット Σ 上の全ての記号列の集合 = Σ^*

$$\Sigma = \{a\} \text{ のとき、 } \Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\} \text{ のとき、} \Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$$