計算の理論 I
―言語とオートマトン―

月曜３校時
大月 美佳

はじめに

- 前回の講義の補足
  - 対角線論法について
- 質問・意見について
  - メールにはなるべく記名
  - もっともな質問・意見はプラスに評価
- 最後にレポート課題を出す
- 出席は、履修カードチェック

前回の講義の補足

- 対角論法など
  - 参考URL
    - http://www.geocities.co.jp/Technopolis/2061/child/mugen/
    - http://www.kyoto-su.ac.jp/%7Eyasugi/Education/question-j.html
  - 参考図書
    - 吉永良正「**ゲーデル・不完全性定理**」講談社：ブルーバックス
    - 野崎昭弘「**たのしいすうがく　2　　不完全性定理　数学体系のあゆみ**」日本評論社
    - レイモンド・スマリヤン(長尾確 訳)「**無限のパラドックス　パズルで学ぶカントールとゲーデル**」白揚社
    - 野矢茂樹「無限論の教室」講談社現代新書

(再)可算でないことの証明

もっとも基本的な例(カントール)

整数全体と実数全体の濃度が違う

→実数全体は可算で無い

証明→対角線論法(diagonalization)

正しくない(可算でない)ことを示したい命題P

1. Pを正しい(可算である)と仮定
2. 仮定から例を導き出す
3. 2の例がPを満たさないことを示す

証明例
(p. 8)

1. S_1(整数全体)とS_2(実数全体)が1対1対応していると仮定
2. 例として次のような数を考える

   「各i=1, 2, 3, … について、第i番目の実数(1の対応で正整数iに対応づけられた実数)の小数点以下i桁目の数字に、法10のもとで5を加えた数字が、小数点以下i桁目であるような実数」
3. これは1を満たさない

---

x_1	=	x_{10}	.	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	…	$x_{1\infty}$
x_2	=	x_{20}	.	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	…	$x_{2\infty}$
x_3	=	x_{30}	.	x_{31}	x_{32}	…	x_{3i}	…	$x_{3\infty}$
:		:		:	:		:		:
x_i	=	x_{i0}	.	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ii}	…	$x_{i\infty}$
:		:		:	:		:		:
x_∞	=	$x_{\infty 0}$	.	$x_{\infty 1}$	$x_{\infty 2}$	…	$x_{\infty i}$	…	$x_{\infty\infty}$
y	=	y_0	.	y_1	y_2		y_i		x_∞

対角線

$y_i = x_{ii}$ に、法10のもとで5を加えた数字 $(0<i<\infty)$
例：8→3, 5→0, 1→6

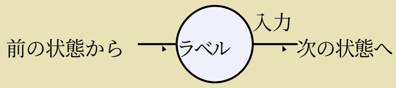
x_1	=	0	.	4	1	…	7	… $x_{1\infty}$
x_2	=	0	.	1	9	…	8	… $x_{2\infty}$
x_3	=	0	.	6	2	…	1	… $x_{3\infty}$
:		:		:	:	対角線	:	:
x_i	=	0	.	9	4	…	4	… 0
:		:		:	:		:	:
x_∞	=	0	.	3	0	…	9	… 5
y	=	0	.	9	4	…	9	… 0

y の各位の数字がある x_i の各位の数字と同じであることは有りえない(y_i は x_{ii} と5ずれているから)

有限状態系

- 状態(state)って何？
  - 受け付け可能な入力（離散）
  - 可能な前後の状態

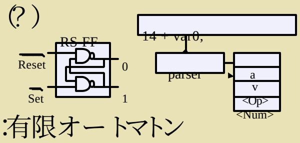
  などの記憶（内部構成）



- 状態が有限個→有限状態系

有限状態系の例

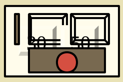
- スイッチング回路
- 語彙解析部（コンパイラ、テキストエディタ）
- 計算機そのもの（?→無限の容量）
- 人間の脳（?）

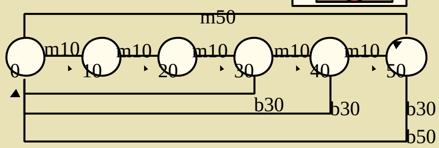


⇒モデル化：有限オートマトン

自動販売機

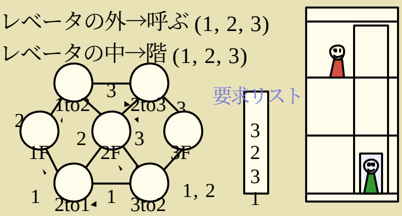
- 入力：お金(m10, m50)、ボタン(b30, b50)
- 出力：品物、おつり





エレベータ

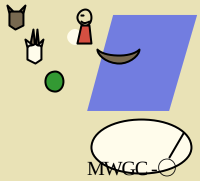
- 入力
  - エレベータの外→呼ぶ (1, 2, 3)
  - エレベータの中→階 (1, 2, 3)



教科書の例１

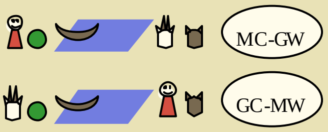
(p. 19)

- 入力＝人間の取る行動
  - 一人で(m)
  - 狼と(w)
  - 山羊と(g)
  - キャベツと(c)



教科書の例 2

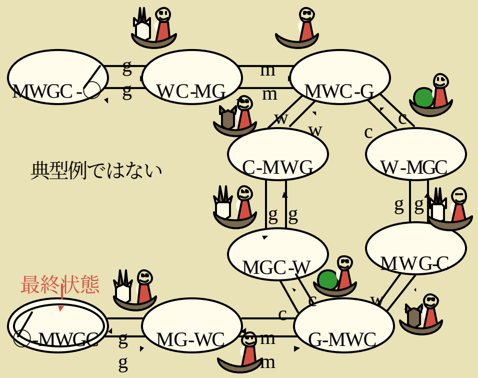
- あってはならない組み合わせ
  - 狼と山羊 (W G-MC, MC-WG)
  - 山羊とキャベツ (GC-MW, MW-GC)



教科書の例 3

- あっても良い組み合わせ
  - 山羊と人間、狼とキャベツ (MG-WC, WC-MG)
  - キャベツだけ (C-MGW, MGW -C)
  - 狼だけ (W-MGC, MGC-W)
  - 山羊だけ (G-MWC, MWC-G)
  - みんな一緒 (MWGC-∅, ∅-MWGC)

最終状態 (受理状態)



ここから定義開始

- 記号列
- アルファベット
- 言語
- オートマトン

なぜ数学的定義？
×あいまい→〇正確さ
×不安定→〇確実性
当たらない直感→危険
（コンピュータは教えられたとおりにしかやれないから）

記号・記号列

- 記号
  :=定義なし
  例) a, b, c, …, 1, 2, …
- 記号列 (string)＝語(word)
  :=記号を有限個並べてできる列
  例) abc, cba, a1, 2c
- |w|
  :=記号列wの長さ(length)
  例) abcbの長さ＝|abcb|＝4
- 空列＝ ε
  – :=長さが0(|ε|＝0)の記号列

接頭語・接尾語

- 接頭語(prefix)
  :=記号列(w)の先頭文字列 (長さは0～|w|)
  例) abcの接頭語＝{ ε , a, ab, abc }
- 接尾語(postfix)
  :=記号列(w)の末尾文字列 (長さは0～|w|)
  例) abcの接尾語＝{ ε , c, bc, abc }

真の (proper)接頭語／接尾語

記号列の連接

- 連接(concatenation)
  - :=２つの記号列をつなぐ演算
  - 例）dogとhouseの連接＝doghouse
- 演算記号
  - なし
  - 記号列wとxの連接＝wx
- 単位元＝ε
  - εw=wε=w

アルファベットと言語

- アルファベット(alphabet)
  - :=空ではない記号の有限集合
  - 例）{q, z, 1} {0}
  - (×) 空集合、無限個の記号の集合
- 言語(language, formal language)
  - アルファベットに属する記号からなる列の集合
  - 例）空集合、{ε}

言語

○ アルファベット{0,1}上の回文(palindrome)
  - 要素は無限個
  - ε, 0, 1, 00, 11, 010, 11011, …

× 「無限個の記号」の上の有限個の回文
  - アルファベット（記号が有限）上ではない

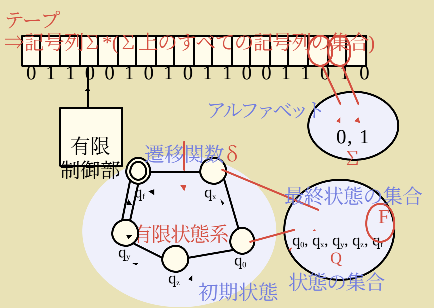
○ アルファベットΣ上の全ての記号列の集合＝Σ*
  - Σ={a}のとき、Σ*={ε, a, aa, aaa, …}
  - Σ={0, 1}のとき、Σ*={ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, …}

有限オートマトン

- 有限オートマトン(finite automaton, FA)
  - 有限個の状態の集合Q
  - （有限の）入力アルファベットΣ
  - 入力記号によって引き起こされる状態遷移
    - 遷移関数δ：Q×ΣからQへの写像
  - 初期状態 $q_0 \in Q$
  - 最終状態の集合 $F \subseteq Q$

→ **M = (Q, Σ, δ, q_0, F)**

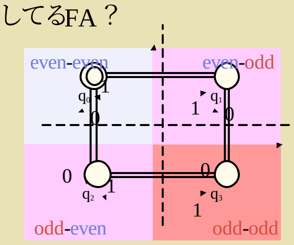
FAの模式図



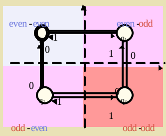
FAの例１

(p.21 図2.2)

- 何をしてるFA？



FAの例 2
(図2.2の定義式)



- M=(Q, Σ, δ, q_0, F)
  - Q = { q_0, q_1, q_2, q_3 }
  - Σ = { 0, 1 }
  - F = { q_0 }
  - δ (q, a)→

入力 :a

状態 :q

	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

入力記号列への拡張

- ?̂: Q× Σ* からQへの関数
  1. ?̂ (q , ?) ? q
     → 入力がないときはFAの状態は変化しない
  2. 任意の列 w と記号 a に対して
     ?̂ (q , wa) ? ? (?̂ (q , w), a)
     → wが入力された状態からaが入力されて遷移する状態がwaが入力された状態

?̂ ? ?

?̂ (q, a) ? ? (?̂ (q,?), a) ? ? (q, a)

受理

- 入力列xを有限オートマトンMで受理する
  → M = (Q, Σ, δ, q_0, F)のとき δ(q_0, x) ∈F
- 受理言語
  → L(M) = { x| δ(q_0, x)∈F }
- 正則集合 (正則)
  → ある言語が有限オートマトンの受理言語であること (部分集合でなく全体)

FAの例 3
(図2.2の受理言語)

- L(M) : 受理言語＝正則集合

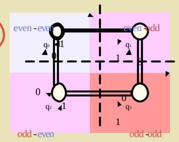
＝0と1がそれぞれ偶数個含まれた列の集合

例 :110101

δ(q_0, 1)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,

δ(q_0, 0)→ q_2, δ(q_2, 1)→ q_3,

δ(q_3, 0)→ q_1, δ(q_1, 1)→ q_0,



レポート課題

- 有限状態系の例としてあげた自動販売機を以下のように変更する
  - おつりを出さずに残して繰り越すこととする
  - 100円を投入できるようにする
  - 保持できる金額は100円までとする
    (投入された結果100円を超えるような場合にはそのまま戻り、状態に変化は起こらないものとする)

レポート課題 (つづき)

- 課題
  1. 状態遷移図を書け
  2. 有限オートマトンとして定義式を書け
     状態の集合、初期状態、アルファベット、遷移関数、最終状態の集合を明示すること
  3. 2のオートマトンが受理する記号列の例を5つ、どのような遷移をするかとともに示せ
- 提出情報
  - 期日 5/13 講義終了時に回収
    - 当日に出席できなかった場合にはレポートBOX9番へ
  - 提出形態 配った課題を表紙にA4の紙を追加する

レポート課題補足

- 最終状態については自由に考えてよい。考察内容が記述されていることが望ましい。
- 今回は決定性、非決定性のどちらの記述でも可とする。決定性、非決定性については休み明けに説明する。
- 例の遷移関数について
  - 時間があれば

前回のテストについて
推移的閉包 1)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 順序対はひっくり返せない
  - (5, 4) ≠ (4, 5)
- 推移的：2つの順序対から1つの順序
  - (1, 2) (2, 3)⇒(1, 3) ○
  - (1, 2) (2, 3) (3, 4)⇒(1, 4) ×

前回のテストについて
推移的閉包 2)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 増えた分についてもチェックが必要
  - R+ 増加分 { (1, 3), (2, 4) }
  - (1, 3) (3, 4)⇒(1, 4)
- 閉包は元の関係を中に含む
  - 増えた分だけではダメ

  R+ = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
  (1, 3), (2, 4), (1, 4) }

前回のテストについて
推移的かつ反射的閉包 1)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- S(定義域と値域)は何？
  - { 1, 2, 3, 4, 5 }
- 閉包は元の関係を中に含む

  R* = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
  (1, 3), (2, 4), (1, 4)
  (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) }

前回のテストについて
対称的閉包 1)

G-閉包R′の定義 (p. 10から類推)

1. Rの元はすべてR′の元である
2. Rの元との間にGの性質があるR′の元がある
3. 1と2以外にR′の元はない

→ 対称的閉包

1. Rの元はすべてR′の元である
2. Rの元と対称的であるR′の元がある
3. 1と2以外にR′の元はない

前回のテストについて
対称的閉包 2)

R = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }

- 1から、

  R_1= { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4) }
- 2から、

  R_2= { (2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 5) }

∴ R′ = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 4),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 5) }