# 計算の理論 I

決定性有限オートマトン (DFA)
と
非決定性有限オートマトン (NFA)

月曜３校時
大月 美佳

## 今日の講義内容

1. 前回のおさらい
   記号列、遷移関数、FA
2. 今日の新しいこと
   1. DFAとNFA
   2. DFAとNFAの等価性
      時間があれば
3. ミニテストとレポート提出

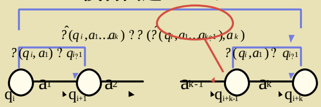
## 記号列の復習

- 以下の定義を思い出せ
  - 記号列、記号列wの長さ|w|、空列 ε
  - 連接、連接の単位元
- 定義から、
  - 空列 ε の長さ| ε |=0
  - w ε = w
  長さ0の文字列(= ε ) を0とように

## DFAの遷移関数の復習

- P. 23の δ の拡張定義に注意
  1. $\hat{?}(q,?)\ ?\ q$
  2. 任意の列wと記号aに対して
     $\hat{?}(q, wa)\ ?\ ?(\hat{?}(q,w),a)$

**演習問題2.4の?はこの$\hat{?}$のこと**




## 遷移関数と帰納法

- この定義でのw
  - 長さ0( ε )から
  - 右向きに任意の記号aを１つずつ増加させて
  - 無限の長さまで
- ⇒wの長さ|w|に関しての段階的な定義
- ⇒帰納法と親和性が高い

## FAの復習

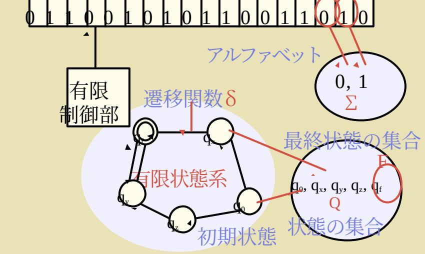
- 有限状態系のモデル
  ⇒有限オートマトン (FA)
  例 :自動販売機、エレベータ、渡船
- FAの定義

**M = (Q, Σ, δ, $q_0$, F)**

# FAの定義式

- **M = (Q, Σ, δ, $q_0$, F)**
  - 有限個の状態の集合 Q
  - (有限の)入力アルファベットΣ
  - 入力記号によって引き起こされる状態遷移
    - 遷移関数δ :Q×ΣからQへの写像
  - 初期状態 $q_0$∈Q
  - 最終状態の集合 F⊆Q

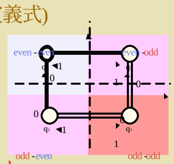
# FAの模式図




# FAの例

(p.21 図2.2の定義式)

- M=(Q, Σ, δ, $q_0$, F)
  - Q = { $q_0$, $q_1$, $q_2$, $q_3$ }
  - Σ = { 0, 1 }
  - F = { $q_0$ }
  - δ(q, a)→




入力 :a

状態 :q

| | | |
|---|---|---|
| | 0 | 1 |
| $q_0$ | $q_2$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_3$ | $q_0$ |
| $q_2$ | $q_0$ | $q_3$ |
| $q_3$ | $q_1$ | $q_2$ |

# 受理について

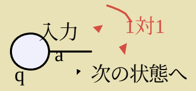
- 入力列xを有限オートマトンMで受理する
  → M = (Q, Σ, δ, $q_0$, F)のとき δ($q_0$, x) ∈F
  ⇒要するに、xのとおり遷移すると最終状態になるということ
- 受理言語＝正則集合 (正則)
  受理される入力記号列の集合
  正則＝正規

# 今日の新しいこと

- 非決定性有限オートマトン
  (nondeterministic finite automaton, NFA)
  1つの入力記号について状態遷移が0個以上

  ⇔決定性有限オートマトン (deterministic finite automaton, DFA)
  1つの入力記号について状態遷移が1つずつ
  前回上げた例はDFA

# 決定性と非決定性

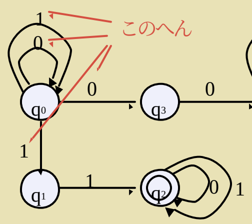



⇒ある記号列に対して道がひとつ決まる
＝**決定性**
(deterministic)


⇒ある記号列に対して道が複数あって決まらない
＝**非決定性**
(nondeterministic)

## NFAの例

(p.26 図2.5)

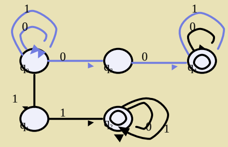



## NFAでの受理

- 入力列に対して状態遷移がひとつでもあれば受理
  - 図2.5での受理される入力列の例 :01001

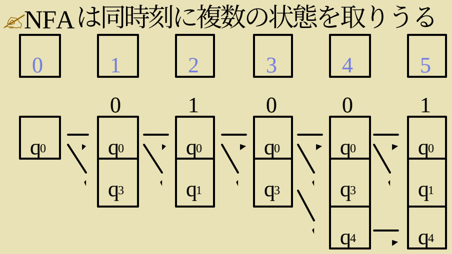
$q_0, q_0, q_0, q_3, \cancel{q_4, q_4}$

注意：
最終状態でとまらなければならないということはない

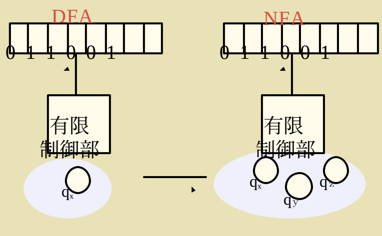



## NFAの取りうる状態

- NFAは同時刻に複数の状態を取りうる




## 有限制御機としてのNFA




**とりうる状態が複数に**

## NFAの定義式

- **M = (Q, Σ, δ, q0, F)**
  - DFAと同じ？→**遷移関数δが違う**
  - **δ :Q×Σ からQのベキ集合 ($2^Q$)への関数**

＝Qの部分集合の集合

  - Q :状態の集合
  - Σ :入力アルファベット
  - $q_0$ :初期状態
  - F :最終状態の集合

## NFAの遷移関数の例

(p.27 図2.7)

- 図2.5の遷移関数δ

入力

| 状態 | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_0, q_3\}$ | $\{q_0, q_1\}$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |
| $q_2$ | $\{q_2\}$ | $\{q_2\}$ |
| $q_3$ | $\{q_4\}$ | $\emptyset$ |
| $q_4$ | $\{q_4\}$ | $\{q_4\}$ |

## δの拡張

- DFAの時と同様にδを拡張
  δ :Q×ΣからQのベキ集合への関数
  →δ :Q×Σ*からQのベキ集合への関数
  要するに、入力記号だったのを入力列に拡張
- 最終的なδ :Qのベキ集合×Σ*からQのベキ集合への関数

$$\delta(P, w) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, w)$$

ここで、PはQの任意の部分集合

## 受理集合

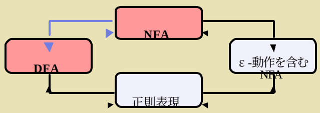
- 受理集合L(M)を以下のように定義
  L(M)={w| δ($q_0$, w)がFの状態を少なくとも一つ含む}

ここで、M=NFA(Q, Σ, δ, $q_0$, F)とする

## 等価性

等価(equivalent)である
=受理集合が同じ
受理集合＝受理言語＝正則集合

- DFAとNFAは実は等価
  ホント？




## DFAとNFAの等価性

- DFAとNFAが等価
  1. DFAで受理できる集合はすべて何らかのNFAで受理できる
     ⇒ DFAは特殊なNFA (簡単)
  2. NFAで受理できる集合はすべて何らかのDFAで受理できる
     ⇒ NFAがDFAで模倣できることを示さなくてはいけない(難しい!)

## DFAとNFAの等価性 1

- DFAはNFAとして書くことができる
  (遷移関数だけの違い)

DFA

| | $a_0$ | … | $a_n$ |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $q_x$ | … | $q_z$ |
| : | : | | : |
| $q_k$ | $q_y$ | … | $q_w$ |

NFA

| | $a_0$ | … | $a_n$ |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_x\}$ | … | $\{q_z\}$ |
| : | : | | : |
| $q_k$ | $\{q_y\}$ | … | $\{q_w\}$ |

要素数1の集合

## DFAとNFAの等価性 2

- NFAをDFAで模倣する
  ⇒ 定理2.1 (p.29)
  Lを非決定性有限オートマトンで受理される集合とする。そのとき、Lを受理する決定性の有限オートマトンが存在する。

## 定理2.1の証明 前準備1

- M(Q, Σ, δ, $q_0$, F)
  ＝言語Lを受理するNFA
- M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)
  M´での一つの状態＝Mの状態の部分集合
  $Q?? 2^Q$ ($Q$のベキ集合)

| | a |
|---|---|
| $\{q_k, \ldots, q_n\}$ | $\{q_x, \ldots, q_y\}$ |

一つの入力に対して
Mが取り得る状態の集合

q´＝M´での一つの状態
[$q_x$, …, $q_y$]と表記⇒q´$_0$＝[$q_0$]

## 定理2.1の証明前準備2

- M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)のF´
  Q´のうちMの最終状態を1個以上含むもの

| | $a_0$ | | $a_n$ |
|---|---|---|---|
| $\{q_0\}$ | $\{q_k, q_{f1}\}$ | … | $\{q_x\}$ |
| : | : | | : |
| $\{q_k\}$ | $\{q_y\}$ | … | $\{q_0, q_{f1}, q_{f2}\}$ |
| : | : | | : |
| $\{q_0, q_k\}$ | $\{q_v, q_w, q_x\}$ | … | $\{q_k, q_{f2}\}$ |

例 F={$q_{f1}$, $q_{f2}$}

## 定理2.1の証明前準備3

- M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)のδ´

$?(\{q_1, q_2, \ldots, q_i\}, a) ? \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$
のとき、かつそのときに限り、
$??([q_1, q_2, \ldots, q_i], a) ? [p_1, p_2, \ldots, p_j]$
とおく。すなわち、
$Q?$の元$[q_1, q_2, \ldots, q_i]$に$??$を適用した結果$??([q_1, q_2, \ldots, q_i], a)$は、
$Q$の元$q_1, q_2, \ldots, q_i$にそれぞれ$?$を適用した結果
$?(q_1, a), ?(q_2, a), \ldots, ?(q_i, a)$の和集合。

## 定理2.1の証明 帰納法1

入力列$x$に対して、
$??(q_0?, x) ? [q_1, q_2, \ldots, q_j] ? \quad ?(q_0, x) ? \{q_1, q_2, \ldots, q_j\}$
であることを$x$の長さに関する帰納法で示す。

1) $|x| ? 0$つまり$x ? ?$であるとき、
$??(q_0?, ?) ? q_0? ? [q_0] ? \quad ?(q_0, ?) ? \{q_0\}$

## 定理2.1の証明 帰納法2

2) $|x| ? m$であるとき与式は成り立っているとする。
ここで$m ? 1$の長さの記号列を$xa$ ($a ? ?$)とする。
$??(q_0?, xa) ? ??(??(q_0?, x), a) = ??([p_1, p_2, \ldots, p_j], a)$
ここで$??$の定義より、
$??([p_1, p_2, \ldots, p_j], a) ? [r_1, r_2, \ldots, r_k]$
$? \quad ?(\{p_1, p_2, \ldots, p_j\}, a) ? \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$
また帰納法の仮定から、
$??(q_0?, x) ? [p_1, p_2, \ldots, p_j] ? \quad ?(q_0, x) ? \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$
$? \; ??(q_0?, xa) ? [r_1, r_2, \ldots, r_k] ? \quad ?(q_0, xa) ? \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$
? 1)2)より、与式は成り立つ。

## 定理2.1の証明 受理

受理 :＝$??(q_0?, x)$が$F?$に含まれる
先ほどの証明から、
$??(q_0?, x) ? [p_1, p_2, \ldots, p_j] ? \quad ?(q_0, x) ? \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$
ここで$F?$の定義より、
$??(q_0?, x)$が$F?$に含まれる＝$[p_1, p_2, \ldots, p_j]$が$F?$に含まれる
$? \quad \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$が$F$を含む＝$?(q_0, x)$が$F$を含む

$? \quad L(M) ? L(M?)$

## NFAと等価なDFAの例

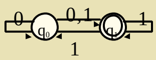
(p. 31 例2.5)

$NFA : M ? (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, ?, q_0, \{q_1\})$

**とする。なお遷移関数 ?は、**

$?(q_0, 0) ? \{q_0, q_1\}, ?(q_0, 1) ? \{q_1\}$

$?(q_1, 0) ? \emptyset, ?(q_1, 1) ? \{q_0, q_1\}$




## L(M)を受理するDFA

$DFA : M ? ? (Q, \{0,1\}, ? ?, [q_0], F)$

$Q ? \{[q_0], [q_1], [q_0, q_1], \emptyset\} ? 2^{\{q_0, q_1\}}$

$? ?([q_0], 0) ? [q_0, q_1], ? ?([q_0], 1) ? [q_1]$

$? ?([q_1], 0) ? \emptyset, ? ?([q_1], 1) ? [q_0, q_1]$

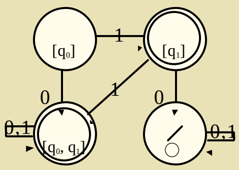
$? ?([q_0, q_1], 0) ? ?(q_0, 0) ? ?(q_1, 0) ? [q_0, q_1]$

$? ?([q_0, q_1], 1) ? ?(q_0, 1) ? ?(q_1, 1) ? [q_0, q_1]$

$? ?(\emptyset, 0) ? ? ?(\emptyset, 0) ? \emptyset$

$F ? \{[q_1], [q_0, q_1]\}$

## M ′の遷移図




Mで受理する記号列をM ′で受理できるか？
試してみよう）
〇 0, 1, 01, 010
× 10, 100, 101

## ミニテストとレポート

- ミニテスト
  - 演習問題 2.4
  - 教科書 ･資料を見ても良い
  - 15分後採点
- ミニテストとレポートを提出すること
- 出したら帰って良し