計算の理論 I
ε-動作を含むNFA

月曜３校時
大月 美佳

講義の前に

- 学内美化の日
  - 15：00~
  - 玄関前
  - ジュース・お茶あり
- 雑多なこと
  - マイク：システム不良
  - ミニテスト：返却について

今日の講義内容

1. 復習
   1. NFAと等価なDFA
2. レポートについて
3. 今日の新しいこと
   1. ε-動作を含むNFA
4. ミニテスト

NFAと等価なDFA

NFA: M (Q, Σ, δ, q_0, F)

→ DFA: M′ (Q', Σ, δ', q'_0, F')

	a_0	…	a_n
q_0	P_{00}	…	P_{0n}
:	:	δ	:
q_k	P_{k0}	…	P_{kn}

→

	a_0	…	a_n
$[q_0]$	$[P_{00}]$	…	$[P_{0n}]$
:	:		:
$[q_k]$	$[P_{k0}]$	…	$[P_{kn}]$
:	:	δ′	:
$[q_0, q_1]$	$[P_{00} \cup P_{10}]$	…	$[P_{0n} \cup P_{1n}]$
:	:		:
$[q_0, \ldots, q_k]$	$[P_{00} \cup \ldots \cup P_{k0}]$	…	$[P_{0n} \cup \ldots \cup P_{kn}]$

P_{ij}：状態q_iのとき入力a_jに対して遷移しうる状態の集合（Qの部分集合）

NFAと等価なDFA つづき

NFA: のF→ DFAのF′の求め方

$F=\{q_k\}$

$\rightarrow F'=\{[q_k], [q_0,q_k], \ldots, [q_0,\ldots, q_k,\ldots, q_n]\}$

$F=\{q_j, q_k\}$

$\rightarrow F'=\{[q_j], [q_k], \ldots, [q_0,\ldots, q_j,\ldots, q_k,\ldots, q_n]\}$

Q′の中でFのどれかの要素を含むもの

Q′とF′の求め方
（演習問題2.9a：総当り）

NFA: M ({p, q, r, s}, {0, 1}, δ_1, p, {s})

→ DFA: M′ (Q', Σ, δ', q'_0, F')

Q′＝Qのベキ集合（部分集合の集合）

= { [-],

[p], [q], [r], [s],

[p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s],

[p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s],

[p, q, r, s] }

$_4C_1$個 $_4C_2$個 $_4C_3$個 $_4C_4$個

F′

δ´の求め方
演習問題2.9a :総当り)

δ 1

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

	0	1
[-]	[-]	[-]
[p]	[p, q]	[p]
[q]	[r]	[r]
[r]	[s]	-
[s]	[s]	[s]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r]	[r, s]	[r]
[q, s]	[r, s]	[r, s]
[r, s]	[s]	[s]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r, s]	[r, s]	[r, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

きちんと書くと
演習問題2.9a :総当り)

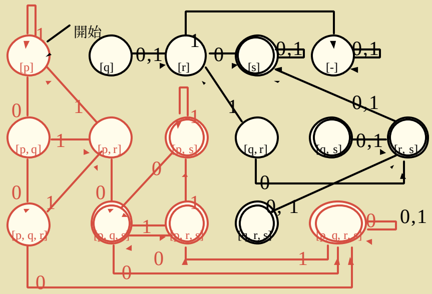
Q´= { [-], [p], [q], [r], [s], [p, q], [p, r],
[p, s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

Σ={0, 1}

q´$_0$=[p]

F´= { [s], [p, s], [q, s], [r, s], [p, q, s],
[p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

総当りでは無駄が多い
=q´$_0$([p])からの道がない状態を含む



δ´とQ´とF´を求める
演習問題2.9a :最小)

δ

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

開始

	0	1
[p]	[p, q]	[p]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

F´

Q´

きちんと書くと
演習問題2.9a :最小)

Q´= { [p], [p, q], [p, r], [p, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

Σ={0, 1}

q´$_0$=[p]

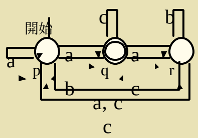
F´= { [p, s], [p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

補題

NFA: M ({p, q, r}, {a, b, c}, δ, p, {q})
と等価なDFAを求める。

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q



δ´とQ´とF´を求める
（補題 :最小）

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q

→

δ

開始

	a	b	c
[p]	[p, q]	[-]	[r]
[r]	[p]	[r]	[p, q]
[p, q]	[p, q, r]	[p]	[q, r]
[q, r]	[p, r]	[p, r]	[p, q]
[p, r]	[p, q]	[r]	[p, q, r]
[p, q, r]	[p, q, r]	[p, r]	[p, q, r]
[-]	[-]	[-]	[-]

F

Q

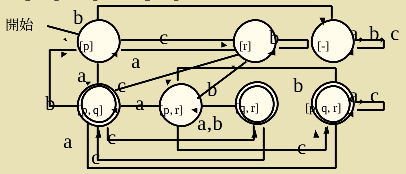
きちんと書くと
（補題 :最小）

Q´= { [-], [p], [r], [p, r], [p, q], [q, r], [p, q, r]}

Σ={a, b, c}

q´$_0$=[p]

F´= { [p, q], [q, r], [p, q, r]}



レポートについて

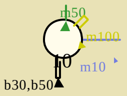
- オートマトンがどんなものかということの理解が主題
- ので、おおまかに合っていれば可
- 今後はここであげる留意点に注意

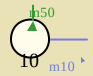
状態遷移図の留意点

- 自己への遷移(DFA)か遷移なし(NFA)か
  - 100円を超える投入
    - 例 :70円の状態で50円追加
  - 代金オーバー
    - 例 :10円の状態で30円の商品を要求
- 最終状態を何にすべきか
  - オートマトンの機能を決めるのは人間
  - 解は一つではない
  - 自動販売機としては中途半端（押し売り?!）

定義式に関する留意点

- 遷移関数の書き方
  - 自己への遷移(DFA)か遷移無し(NFA)か





	m10	m50	m100	b30	b50
10	20	60	10	10	10

	m10	m50	m100	b30	b50
10	{20}	{60}	∅	∅	∅

定義式の解答例

- 状態の集合 Q
  - = { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 }
- 入力アルファベット Σ
  - = { m10, m50, m100, b30, b50 }
- 初期状態 q_0
  - = 0
- 最終状態の集合 F
  - = { 0 } ＊これに限らない

定義式の解答例 つづき

- 遷移関数δ
  - DFA
  - 自己への遷移
    - 100を超える投入
    - 代金オーバー
  - NFAでは？

	m10	m50	m100	b30	b50
0	10	50	100	0	0
10	20	60	10	10	10
20	30	70	20	20	20
30	40	80	30	0	30
40	50	90	40	10	40
50	60	100	50	20	0
60	70	60	60	30	10
70	80	70	70	40	20
80	90	80	80	50	30
90	100	90	90	60	40
100	100	100	100	70	50

このDFAが受理する記号列

- 最終状態の集合を何にしたかに依存
  - その最終状態のどれかに到達する記号列
  - 上の例では 0 一つが最終状態
    1. m10, m10, m10, b30
    2. m50, b50

    など

今日の新しいこと

- ε-動作を含むNFA
  - 正則表現とのつなぎとして
- ε-CLOSURE
  - ε-動作を含むNFAと含まないNFAの等価性を示すため
- ε-動作を含むNFAと含まないNFAの等価性
  - ε-動作なしNFAでε-動作ありNFAを模倣

ε-動作を含むNFA

- ε-動作を含むNFA
  ＝空入力εによる状態遷移が許されたNFA
- Wがε-動作を含むNFAで受理
  ＝初期状態から最終状態へ至る道がw
  ただし、wに明示的にεは含まれない
- 定義式 M (Q, Σ, δ, q_0, F)
  δ＝Q×(Σ∪{ε})からQのベキ集合への関数
  → δ(q, a)
  ＝状態qからラベルaの遷移で移る先の状態の集合

ε-動作を含むNFAの例

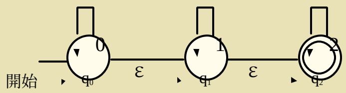
(p. 32 図2.8)

受理入力列の例

1. 002→00εε2
2. 012 →0ε1ε2
3. 12 →ε1ε2
4. 2 →εε2

Σ∪{ε}

δ	0	1	2	ε
q_0	{q_0}	○	○	{q_1}
q_1	○	{q_1}	○	{q_2}
q_2	○	○	{q_2}	○

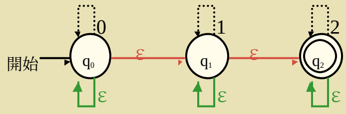


ε-CLOSURE

- ある状態qからε-動作のみで移れる先の状態の集合
  文字列に対する遷移関数 ? を定義するため
- ε-CLOSUREの定義
  - ε-CLOSURE(q)
    ＝遷移図からラベルがεでない有向辺を取り去った上で、qから到達可能な頂点の集合
  - ε-CLOSURE(P) : P は状態の集合
    ＝ □ ? ? *CLOSURE*(*q*)
    q? P

ε -CLOSUREの例
(p. 34 例2.8)

- ε -CLOSURE(q_0)={q_0, q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_1)={q_1, q_2}
- ε -CLOSURE(q_2)={q_2}



ラベルがεである暗黙的な辺
長さ0の辺)

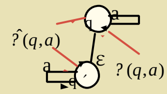
$\hat{?}$の定義

1) $\hat{?}(q,?)$? ? ? $CLOSURE(q)$

2) $\hat{?}(q,wa)$? ? ? $CLOSURE(P)$

ただし、 w ? ? *,q ? ? ,

P ? { p | ある $\hat{?}(q,w)$の元rに対して p ? ? (r,a)}



$\hat{?}(q,a)$は必ずしも ?(q,a)と等しくない。

qからaをラベルに持つ道（εを含む）
を通って到達できる状態の集合

qからaの辺で直接到達
できる状態の集合

?と$\hat{?}$の拡張

1) $\hat{?}(q,?)$? ? ? $CLOSURE(q)$

2) $\hat{?}(q,wa)$? ? ? $CLOSURE(P)$

ただし、w ? ? *,q ? ? ,

P ? {p | ある$\hat{?}(q,w)$の元rに対してr ? ?(r,a)}

さらに、状態の集合R(? Q)に対して

3) ?(R,a) ? $\bigcup_{q?R}$?(q,a)

4) $\hat{?}$(R, w) ? $\bigcup_{q?R}$ $\hat{?}(q,w)$

ε -動作ありNFAの受理言語

- 定義

M ? $(Q,?,?,q_0,F)$が受理する言語は

{w | $\hat{?}(q_0,w)$はFの元を含む}

であり$L(M)$と書く。

受理の例
(p. 34 例2.8)

1. 0: $\hat{?}(q_0,0)$? ? ? $CLOSURE$(? ($\hat{?}(q_0,?)$,0))
   ? ? ? $CLOSURE$(? ({q_0 ,q_1,q_2},0))
   ? ? ? $CLOSURE$(? (q_0,0) ? ? (q_1,0) ? ?(q_2,0))
   ? ? ? $CLOSURE$({q_0} ? ○ ? ○)
   ? ? ? $CLOSURE$({q_0}) ? {q_0, q_1, q_2}
2. 01: $\hat{?}(q_0,01)$? ? ? $CLOSURE$(? ($\hat{?}(q_0,0)$,1))
   ? ? ? $CLOSURE$(? ({q_0 ,q_1,q_2},1))
   ? ? ? $CLOSURE$(? (q_0,1) ? ?(q_1,1) ? ? (q_2,1))
   ? ? ? $CLOSURE$(○ ? {q_1} ? ○)
   ? ? ? $CLOSURE$({q_1}) ? {q_1, q_2}

ε -動作なしNFAと ε -動作ありNFAの等価性
(p.34 定理2.2)

ε -動作ありNFA: M (Q, Σ, δ, q_0, F)が
ε -動作なしNFA: M´(Q, Σ, δ´, q_0, F´)
で模倣できる (定理2.2:証明→帰納法)。

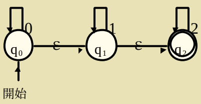
F?? ?F ? {q_0}　? - CLOSUREがFの元を含むとき
　　 ?F　　　　 そうでないとき

?´(q,a) ? $\hat{?}(q,a)$　(q? Q, a? ?)

ε -動作ありNFAを模倣する ε -動作なしNFAの例 (p. 36 例2.9)

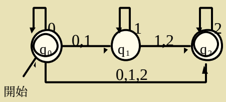
δ

	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	○	○	$\{q_1\}$
q_1	○	$\{q_1\}$	○	$\{q_2\}$
q_2	○	○	$\{q_2\}$	○



δ´

	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	○	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	○	○	$\{q_2\}$



ミニテスト

- ミニテスト
  - 演習問題 2.9b
  - 教科書·資料を見ても良い
- 解答は板書
- ミニテストを提出すること
- 出したら帰って良し