計算の理論 I
－Myhill-Nerodeの定理と最小化－

月曜３校時
大月 美佳

連絡事項

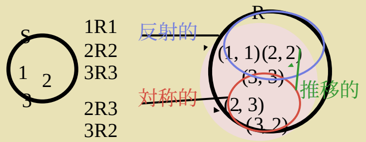
- レポート
  - 問題用紙：A4
  - 提出期限：平成14年7月8日（月）
    授業終了時に回収
  - 提出場所：AV講義室
    欠席等で提出できなかった者は理由を明記の上レポートボックス９番へ（7月15日まで）

今日の講義内容

1. ずっと前の復習
   同値関係、同値類について
2. 今日の新しいこと
   Myhill-Nerodeの定理と最小化(節3.4, p. 84)
   →FAが同値類に分割できるという話
   →それを用いてFAの最小化を行う

（復習 p.9）
同値関係

- 同値関係 (equivalence relation)
  := 反射的、対称的、かつ推移的である関係



（復習 p.9）
同値類

- 同値類 (equivalence class)
  := 次の性質を持つ部分集合S_i
  1. $S_i \neq \Phi$, かつ$i \neq j$ならば$S_i \cap S_j = \Phi$
  2. S_iの各元a, bに対してaRb
  3. $i \neq j$のときS_iの各元aとS_jの各元bに対してaRbは成り立たない
- SはS_iの和$\cup S_i$として表される

(復習 例1.4 pp. 9～10)
同値関係の例

- 法mに関する合同 (congruence module m)
  := i-jがmで割り切れること
  := $i \equiv_m j$ または $i \equiv j \bmod m$
  反射的：任意のaについてa-aはmで割り切れる
  推移的：$a \equiv_m b$かつ$b \equiv_m c$ならば、$a \equiv_m c$
  $a=m \times x+b$, $b= m \times y+c$ → $a=m \times (x+y)+c$
  対称的：$a \equiv_m b$ならば$b \equiv_m a$
  $a-b=m \times x$ → $b-a=m \times (-x)$

復習 p.10）
整数全体の≡mによる同値類

		...	-1	0	1	2	...	
0	{	...	-m,	0,	m,	2m,	...	}
1	{	...	-m+1,	1,	m+1,	2m+1,	...	}
			:	:	:	:		
m-1	{	...	-1,	m-1,	2m-1,	3m-1,	...	}

m個

Σ*に関する 2種類の同値関係

xRLy

任意の集合 L(? ? *)に対して、

$xR_L y$

□

各z(? ? *)に対し xzとyzがともに Lに属するか、

またはともに Lに属さない。

xRMy

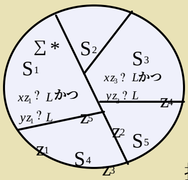
M ? $(Q, ?, ?, q_0, F)$をDFAとしたとき、

? *の任意の元 x, yに対して、

$xR_M y$? ? (q_0, x) ? ? (q_0, y)

xRLyの同値類

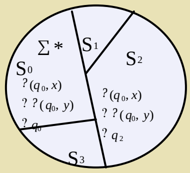
- Lが正則集合のとき
  - 同値類の個数（指数）は常に有限



指数＝5

xRMyの同値類

- RMはΣ*を同値類に分割する
  - 各同値類はq_0から到達可能な状態に対応



指数＝4

右不変
(right invariant)

同値関係Rにおいて

xRyならばxzRyz

という性質があるとき、

Rは（連接に関して）右不変な関係である

という。

Myhill-Nerodeの定理
(定理3.9 p.85)

次の三つの条件は互いに同値である。

- L⊆Σ*は有限オートマトンの受理集合である。
- Lは、右不変で有限の指数を持つ同地関係のいくつかの同値類の和に等しい。
- 同値関係RLを次のように定義する：xRLy⇔Σ*のすべての元zに対してxzとyzはともにLに属するかともにLに属さない。このRLの指数は有限である。

有限オートマトンの最小化
(定理3.10 p.87)

正則集合Lを受理する最小の状態数を持つ有限オートマトンは、
同型 (つまり状態の名前が異なるだけ) を除いてただ一つであり、
それは定理3.9の証明で示したM´に等しい。

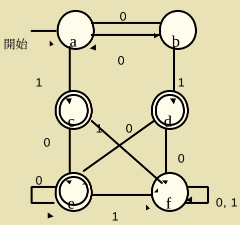
M´
(定理3.9 p.86)

Q´をR_Lの同値類とし、xの属する同値類を[x]とおく。ここで、δ([x], a)=[xa]と定義する。
これは、R_Lが右不変のため矛盾しない。
q_0´=[ε]とおき、F´={[x]|x∈L}とおく。
そのとき、δ´(q_0´, x)=[x]であり、
x∈Lのとき[x]∈F´で逆も成り立つ。

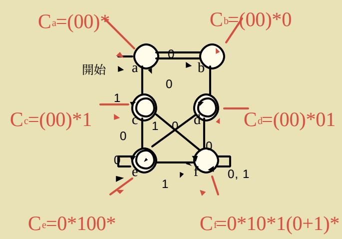
∴有限オートマトンM´=(Q´, Σ, δ´, q_0´, F´)はLを受理する。(x∈L(M´)のとき、かつそのときのみ[x]∈F´)

例3.7
(p.86)

- L=0*10*
- Lを受理するDFA



例3.7 のR_Mによる同値類
(p.86)

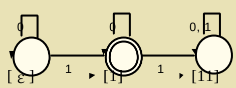


例3.7 のR_Lによる同値類
(p.86)

1. x と y が1を含まない。
   C_1=0*= C_a + C_b=(00)*0+(00)*
2. x と y が1を1つだけ含む。
   C_2 = 0*10*=C_c+C_e+C_d=(00)*1+0*100*+(00)*01
3. x と y が1を2つ以上含む。
   C_3= C_f=0*10*1(0+1)*

R_Lから構成されたDFA M´
(p.87)

1. C_1=0*からε
2. C_2 = 0*10*から1
3. C_3= 0*10*1(0+1)*から11



最小化アルゴリズム
(p.88)

- 最小のDFA M ´を求める簡単な方法
- DFA Mの状態に関する同値類を導入

$DFA M ? (Q, ?, ?, q_0, F)$

$p, q ? Q, x ? ?^*$

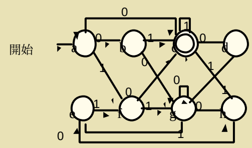
区別可能(distinguishable)
= 一方が最終状態で
もう一方が最終でない

$p ? q$ 同値(equivalent)

各入力列 xに対し、$?(p, x)$と$?(q, x)$は
ともに最終状態である　か、
またはともに最終状態　でない。

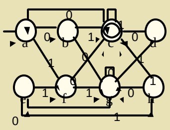
同値類をもとめる手順 (例3.8 p.88～90)

- 二つの状態が同値でないものにX印をつけていって、残ったものが同値類になる。



ステップ1

- 最終状態とそうでない状態の組にXをつける。

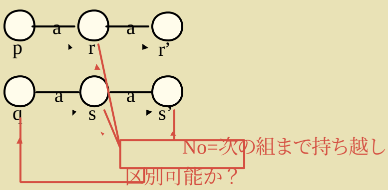


	a	b	c	d	e	f	g	h
a			X					
b			X					
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

ステップ2

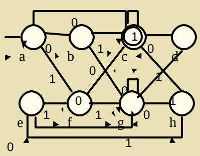
- まだXのついてない場所（区別可能か分かっていない場所）を調べる。
  - (p, q)から、各記号aについてr=δ(p, a)とs=δ(q, a)を求める。
  - (r, s)のどれかに既にXがついていたら、(p, q)にもXをつける。
    - (r, s)がxで区別可能なら(p, q)はaxで区別可能だから。
  - (r, s)のどれもXがついていなかったら、(p, q)を(r, s)のリストに加える。
    - 将来(r, s)にXがついたら(p, q)にXをつけるため。

図で説明しよう



ステップ2 詳細 (a, b)

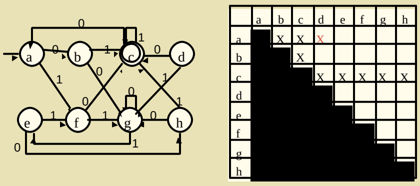
- 例：(a, b)の組について
  - (δ(a, 0), δ(b, 0)) =(b, g)
  - (δ(a, 1), δ(b, 1)) =(f, c) ← 区別可能



	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X					
b			X					
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

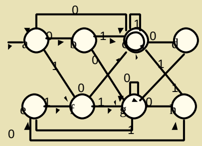
ステップ2 詳細 (a, d)

- 例：(a, d)の組について
  - (δ (a, 0), δ (d, 0)) =(b, c) ← 区別可能
  - (δ (a, 1), δ (d, 1)) =(f, g)



ステップ2 詳細 (a, e)

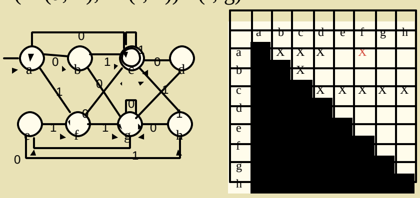
- 例：(a, e)の組について
  - (δ (a, 0), δ (e, 0)) =(b, h)
    →(b, h)のリストに(a, e)を加える。
  - (δ (a, 1), δ (e, 1)) =(f, f)
    ← 1で始まる列はない



(b, h)	(a, e)

ステップ2 詳細 (a, f)

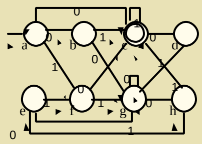
- 例：(a, f)の組について
  - (δ (a, 0), δ (f, 0)) =(b, c) ← 区別可能
  - (δ (a, 1), δ (f, 1)) =(f, g)



ステップ2 詳細 (a, g)

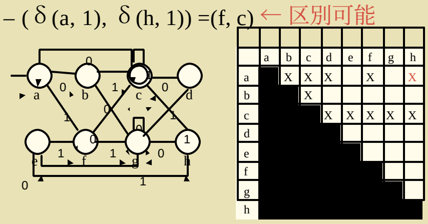
- 例：(a, g)の組について
  - (δ (a, 0), δ (g, 0)) =(b, g)
    →(b, g)のリストに(a, g)を加える。
  - (δ (a, 1), δ (g, 1)) =(f, e)
    →(f, e)のリストに(a, g)を加える。

(b, h)	(a, e)
(b, g)	(a, g)
(f, e)	(a, g)



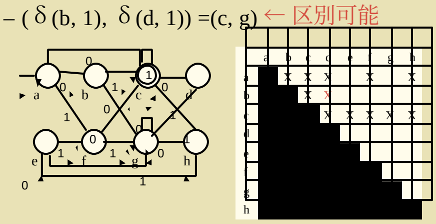
ステップ2 詳細 (a, h)

- 例：(a, h)の組について
  - (δ (a, 0), δ (h, 0)) =(b, g)
  - (δ (a, 1), δ (h, 1)) =(f, c) ← 区別可能



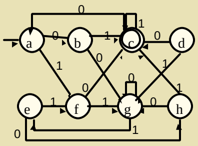
ステップ2 詳細 (b, d)

- 例：(b, d)の組について
  - (δ (b, 0), δ (d, 0)) =(g, c) ← 区別可能
  - (δ (b, 1), δ (d, 1)) =(c, g) ← 区別可能



ステップ2 詳細 (b, e)

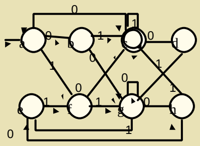
- 例：(b, e)の組について
  - – (δ (b, 0), δ (e, 0)) =(g, h)
  - – (δ (b, 1), δ (e, 1)) =(c, f) ← 区別可能



	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X	X		X		X
b			X	X	X			
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

ステップ2 詳細 (b, f)

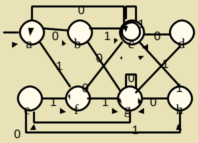
- 例：(b, f)の組について
  - – (δ (b, 0), δ (f, 0)) =(g, c) ← 区別可能
  - – (δ (b, 1), δ (f, 1)) =(c, g) ← 区別可能



	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X	X		X		X
b			X	X	X	X		
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

ステップ2 詳細 (b, g)

- 例：(b, g)の組について
  - – (δ (b, 0), δ (g, 0)) =(g, g)
  - – (δ (b, 1), δ (g, 1)) =(c, e) ← 区別可能

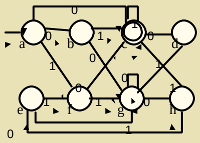


	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X	X		X		X
b			X	X	X	X	X	
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

ステップ2 詳細 連鎖

- 例：(b, g)からの連鎖

(b, h)	(a, e)
(b, g)	(a, g)
(f, e)	(a, g)

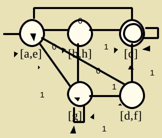


	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X	X		X	X	X
b			X	X	X	X	X	
c				X	X	X	X	X
d								
e								
f								
g								
h								

例3.8 の最終結果 (p.90)

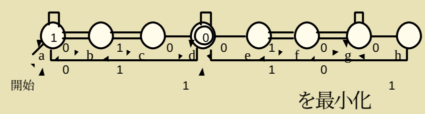
	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X	X	X		X	X	X
b			X	X	X	X	X	
c				X	X	X	X	X
d					X		X	X
e						X	X	X
f							X	X
g								X
h								

a ≡ e
b ≡ h
d ≡ f



今日のミニテスト

- ミニテスト
  - – 演習問題 3.25
  - – 教科書・資料を見ても良い
- 資料、ミニテストがない人は前へ
- 提出したら帰って良し



を最小化