計算の理論 I
文脈自由文法の標準形

月曜3校時
大月美佳

連絡事項

- レポートについて最終
  - 問題用紙：A4
    持ってない人は講義終了後取りにくること
  - 提出期限：平成14年7月8日（月）来週
    授業終了時に回収
  - 提出場所：AV講義室
    欠席等で提出できなかった者は理由を明記の上レポートボックス9番へ（7月15日まで）

今日の講義内容

- 文脈自由文法の標準形
  - Chomsky標準形（CNF）
    - P.120～122
  - Greibach標準形
    - P.122～128
    - 略

文脈自由文法の定義

- 文脈自由文法(context-free grammar)
  - 非終端アルファベット N（有限集合）
    - 要素 x ∈N 非終端記号(non-terminal symbol)
  - 終端アルファベット T（有限集合）
    - 要素 x ∈ T 終端記号(terminal symbol)
  - 開始記号(start symbol) S∈Q
  - 生成規則(production) P⊆N×(N∪T)*
    - A→α と書く（α = ε のとき ε 生成規則）
    - $A \to \alpha_1 | \ldots | \alpha_n = A \to \alpha_1, \ldots, A \to \alpha_n$

→ **G = (N, T, P, S)**

標準形が必要なわけ

- 入り組んでないほうが扱いやすい

Chomsky標準形

- 文脈自由文法G=(N, T, P, S)

その生成規則の形が

$A \to BC$　(A, B, C∈N)

$A \to a$　(A∈N, a∈T)

のとき

Chomsky標準形(CNF: Chomsky Normal Form)

であるという。

Chomsky標準形の作り方

1. ε 生成規則(ε -規則: ε -production)の消去
   ← ε 生成規則消去定理
2. 鎖生成規則の消去
   ←鎖生成規則の消去定理
3. Chomsky標準形の構成

ε 生成規則の消去

文脈自由文法　G=(N, T, P, S)に対して、
以下のような性質をもつ
G ´= (N ´, T, P ´, S ´)を構成できる。

(1) L(G ´)=L(G)
(2) ε ∈L(G)のときのみG ´は ε 生成規則をもち、それはS ´→ ε に限る。
(3) G ´の開始記号S ´はP ´のどの生成規則にも現れない。

ε 生成規則の消去法

G ´= (N ´, T, P ´, S ´)の構成法

N ´=N∪{S ´}　(S ´∉N)

P ´は次の生成規則より成る

(i) ε ∈L(G)ならばS ´→ ε は生成規則である。
(ii) S ´→Sは生成規則である。
(iii) $A\rightarrow \alpha_1 A_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k A_k \alpha_{k+1} \in P$,
$A_i \in N \cup T$ $(1 \leqq i \leqq k)$, $\alpha_i \in N_n^*$ならば
$A \rightarrow A_1 \ldots A_k$は生成規則である$(k \geqq 1)$。

ε 生成規則の消去法つづき

ここで、N_iは次のように定義される。

$n=|N|$, $i=1, \ldots, n$

$N_1=\{A|A\rightarrow \varepsilon \in P\}$

$N_{i+1}=N_i \cup \{A|A\rightarrow \alpha \in P,\ \alpha \in N_i^*\}$

ε 生成規則の消去例 1

G=(N, T, P, S)を以下のようであるとする。

N={S, A, B, C}, T={a, b, c},
P={S→AB, A→ABAC|B|a,
B→C|b| ε , C→B|c| ε }

1. G ´=(N ´, T, P ´, S ´)
   N ´= N∪{S ´}={S, A, B, C, S ´}, T={a, b, c}

ε 生成規則の消去例 2

2. 生成規則P ´
   P={S→AB, A→ABAC|B|a,
   B→C|b| ε , C→B|c| ε }
1. (i)より、 ε ∈L(G)だからS ´→ ε
2. (ii)より、 S ´→S

ε生成規則の消去例3

2の3　(iii)より、

1.N_iを調べる。

N_1={B, C}, N_2={A, B, C}, N_3={S, A, B, C}

2.S→ABについて、

1.A_1=A, A_2=B, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\varepsilon$ とすると、S→AB

2.A_1=A, $\alpha_1=\varepsilon$, α_2=Bとすると、S→A

3.A_1=B, α_1=A, $\alpha_2=\varepsilon$とすると、S→B

ε生成規則の消去例4

2の3のつづき

3. A→ABACについて、
   1. A_1=A, A_2=B, A_3=A, A_4=C, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\varepsilon$ とすると、A→ABAC
   2. A_1=A, A_2=B, A_3=A, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\varepsilon$, α_4=Cとすると、A→ABA
   3. A_1=A, A_2=B, A_3=C, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=\varepsilon$, α_3=Aとすると、A→ABC
   4. A_1=A, A_2=A, A_3=C, $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_4=\varepsilon$, α_2=Bとすると、A→AAC
   5. A_1=B, A_2=A, A_3=C, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\varepsilon$, α_1=Aとすると、A→BAC

ε生成規則の消去例5

2の3のつづき

3. A→ABACについて、
   6. A_1=A, A_2=B, $\alpha_1=\alpha_2=\varepsilon$, α_4=ACとすると、A→AB
   7. A_1=A, A_2=A, $\alpha_1=\varepsilon$, α_2=B, α_4=Cとすると、A→AA
   8. A_1=A, A_2=C, $\alpha_1=\varepsilon$, α_2=BC, $\alpha_4=\varepsilon$とすると、A→AC
   9. A_1=B, A_2=A, α_1=A, $\alpha_2=\varepsilon$, α_4=Cとすると、A→BA
   10. A_1=B, A_2=C, α_1=A, α_2=A, $\alpha_4=\varepsilon$とすると、A→BA
   11. A_1=A, A_2=C, α_1=AB, $\alpha_2=\varepsilon$, $\alpha_4=\varepsilon$とすると、A→AC
   12. A_1=A, $\alpha_1=\varepsilon$, α_2=BACとすると、A→A
   13. A_1=B, α_1=A, α_2=ACとすると、A→B
   14. A_1=C, α_1=ABA, $\alpha_2=\varepsilon$とすると、A→C

ε生成規則の消去例6

2の3のつづき

4. A→BとA→aはそのまま

4. B→C, B→b, C→B, C→cはそのまま

まとめると生成規則は以下のようになる。

S→S| ε

S→AB|A|B

A→ABAC|ABA|ABC|AAC|BAC|AB|AA|BA|AC|BC|A|B|C|a

B→C|b

C→B|c

鎖生成規則の消去

文脈自由文法　G=(N, T, P, S)に対して、
以下の形の生成規則しかもたない
L(G´)=L(G)なる
G´= (N, T, P´, S)を構成できる。

(1) $\varepsilon \in L(G)$のときに限りS→ ε

(2) A→ α　　($|\alpha| \geqq 2$, $\alpha \in ((N \cup T)-\{S\})^*$

(3) A→ α　　($\alpha \in T$)

鎖生成規則の消去法

A→B (B∈N)の形の生成規則の除去手順

1. N_i(A)　(i≧1)を次のように与える。
   1. N_1(A)={A}
   2. $N_{i+1}=N_i(A) \cup \{B \in N |$ あるC$\in N_i(A)$が存在して、C→ B∈P}
2. P´を次のように与える。

P´={A→ α | ∃B$\in N_n$(A) [B→ α ∈Pかつ α ∈N]}

ここで, n=|N|。

鎖生成規則の消去例 1

- G=(N, T, P, S)を次のように与える。
  - N={S, A, B, C}, T={a, b, c}
  - P={S→A, A→AB|a, B→C|b, C→A|c}
  - このとき
    - $N_1(S)=\{S\}$, $N_2(S)=\{S, A\}=N_3(S)$
    - $N_1(A)=\{A\}=N_2(A)$
    - $N_1(B)=\{B\}$, $N_2(B)=\{B, C\}$, $N_3(B)=\{A, B, C\}=N_4(B)$
    - $N_1(C)=\{C\}$, $N_2(C)=\{A, C\}=N_3(C)$

鎖生成規則の消去例 2

- B→α ∈Pかつα ∈Nなる Bとα
  - {(A, AB), (A, a), (B, b), (C, c)}
    - $N_4(S)=\{S, A\}$からα は{AB, a}
    - $N_4(A)=\{A\}$からα は{AB, a}
    - $N_4(B)=\{A, B, C\}$からα は{AB, a, b, c}
    - $N_4(C)=\{A, C\}$からα は{AB, a, c}
- G´=(N, T, P´, S)は次のようになる。
  - N={S, A, B, C}, T={a, b, c}
  - P={S→AB|a, A→AB|a, B→a|b|c|AB, C→a|c|AB}

Chomskyの標準形の構成法

CFL G=(N, T, P, S)に対して、
L(G)-{ ε }を生成するChomsky標準形の
CFL G´=(N´, T, P´, S´)を構成する。

1. Gの S→ ε 以外の生成規則の形を
   - A→α (|α|≧2, α∈((N∪T)-{S})*
   - A→α (α ∈T)
   - であるとする。

Chomskyの標準形の構成法 つづき

2. A→$X_1 \ldots X_k$ (X_i∈(N∪T)-{S}, k≧2)
   の形をした生成規則に対して、
   X_i∈NのときY_i=X_i とし、
   X_i∈Tのとき新しく非終端記号Y_i を導入して、
   これを一旦
   A→$Y_1 \ldots Y_k$, Y_i→X_i
   で置き換える。そして、A→$Y_1 \ldots Y_k$に対して、
   新たにk-2個の非終端記号$Z_1 \ldots Z_{k-2}$を導入して、
   A→$Y_1 Z_1$, Z_1→$Y_2 Z_2$, …, Z_{k-2}→ $Y_{k-1} Y_k$
   で置き換える。これは、Chomskyの標準形となる。

Chomskyの標準形の構成例

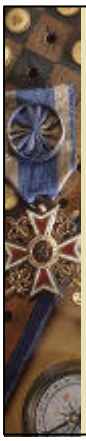
CFL G=(N, T, P, S)を以下とする。

- N={S, A}, T={a}
- P={S→AaAA, A→a}
- このGをChomsky標準形に直す。
- S→$Y_1Y_2Y_3Y_4$, Y_1→A, Y_2→a, Y_3→A , Y_4→A
- S→Y_1Z_1, Z_1→Y_2Z_2, Z_2→Y_3Y_4
- S→AZ_1, Z_1→Y_2Z_2, Z_2→AA

Chomskyの標準形の構成例 結果

Chomsky標準形 G´=(N´, T, P´, S´)は

- N´={S, A, Z_1, Z_2, Y_2}
- P´={S→AZ_1, Z_1→Y_2Z_2, Z_2→AA, Y_2→a, A→a}



今日のミニテスト

- ミニテスト
  教科書・資料を見ても良い
- 資料、ミニテストがない人は前へ
- 交換採点を行い、提出したら帰って良し