計算の理論 I
NFAとDFAの等価性

月曜3校時
大月 美佳

今日の講義内容

1. レポートについて
2. NFAとDFAの等価性
3. ミニテスト

レポートについて

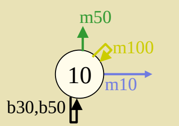
- オートマトンがどんなものかということの理解が主題
- ので、おおまかに合っていれば可
- 今後はここであげる留意点に注意

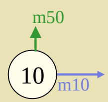
状態遷移図の留意点

- 自己への遷移(DFA)か遷移なし(NFA)か
  - 100円を超える投入
    - 例：70円の状態で50円追加
  - 代金オーバー
    - 例：10円の状態で30円の商品を要求
- 最終状態を何にすべきか
  - オートマトンの**機能**を決めるのは人間
  - 解は一つではない
  - 自動販売機としては**中途半端**（押し売り?!）

定義式に関する留意点

- 遷移関数の書き方
  - 自己への遷移(DFA)か遷移無し(NFA)か





仕様には合ってない？
(dead state)

	m10	m50	m100	b30	b50
10	20	60	10	10	10

	m10	m50	m100	b30	b50
10	{20}	{60}	∅	∅	∅

定義式の解答例

- 状態の集合 Q
  = { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 }
- 入力アルファベット Σ
  = { m10, m50, m100, b30, b50 }
- 初期状態 q_0
  = 0
- 最終状態の集合 F
  = { 0 } ＊これに限らない

定義式の解答例 つづき

- 遷移関数 δ
  (DFAの場合)
  自己への遷移
  - 100を超える投入
  - 代金オーバー

	m10	m50	m100	b30	b50
0	10	50	100	0	0
10	20	60	10	10	10
20	30	70	20	20	20
30	40	80	30	0	30
40	50	90	40	10	40
50	60	100	50	20	0
60	70	60	60	30	10
70	80	70	70	40	20
80	90	80	80	50	30
90	100	90	90	60	40
100	100	100	100	70	50

このDFAが受理する記号列

- 最終状態の集合を何にしたかに依存
  - その最終状態のどれかに到達する記号列
  - 上の例では 0 一つが最終状態
    1. m10, m10, m10, b30
    2. m50, b50

    など

今日の新しいこと

- NFAとDFAの等価性
  - 教科書 2.3.5 p.66 – p. 75
  - サブセット構成法
    - 複雑なものと簡単なものの2つ

等価性

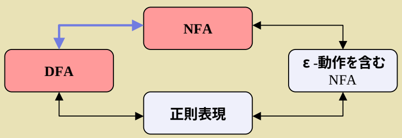
等価(equivalent)である

=受理集合が同じ

受理集合＝受理言語＝正則集合

DFAとNFAは実は等価

ホント？



DFAとNFAの等価性

- DFAとNFAが等価
  1. DFAで受理できる集合はすべて何らかのNFAで受理できる
     ⇒ DFAは特殊なNFA (簡単)
  2. NFAで受理できる集合はすべて何らかのDFAで受理できる
     ⇒ NFAがDFAで模倣できることを示さなくてはいけない(難しい!)

DFAとNFAの等価性 1

DFAはNFAとして書くことができる

(遷移関数だけの違い)→定理 2.12(p. 71)

DFA

	a_0	…	a_n
q_0	q_x	…	q_z
:	:		:
q_k	q_y	…	q_w

→

NFA

	a_0	…	a_n
q_0	$\{q_x\}$	…	$\{q_z\}$
:	:		:
q_k	$\{q_y\}$	…	$\{q_w\}$

要素数1の集合

DFAとNFAの等価性 2

- NFAをDFAで模倣する

  ⇒ 【定理】

  Lを非決定性有限オートマトンで受理される集合とする。そのとき、Lを受理する決定性の有限オートマトンが存在する。

NFAを模倣するDFAは、「サブセット構成法」で作成できる。→定理 2.11 (p. 70)

サブセット構成法(1)

- M(Q, Σ, δ, q_0, F)

  ＝言語Lを受理するNFA
- M´(Q´, Σ, δ´, q'_0, F´)

  M´での一つの状態＝Mの状態の部分集合

  $Q' = 2^Q$ (Qのベキ集合)

	a_n
$\{q_k, \ldots, q_n\}$	$\{q_x, \ldots, q_y\}$

一つの入力に対して
Mが取り得る状態の集合

q´＝M´での一つの状態
[q_x, …, q_y]と表記⇒ q'_0 ＝[q_0]

サブセット構成法(2)

- M´(Q´, Σ, δ´, q'_0, F´) のF´

  Q´のうちMの最終状態を1個以上含むもの

	a_0		a_n
$\{q_0\}$	$\{q_k, q_{f1}\}$	…	$\{q_x\}$
:	:		:
$\{q_k\}$	$\{q_y\}$	…	$\{q_0, q_{f1}, q_{f2}\}$
:	:		:
$\{q_0, q_k\}$	$\{q_v, q_w, q_x\}$	…	$\{q_k, q_{f2}\}$

例：F={q_{f1}, q_{f2}}

サブセット構成法(3)

- M´(Q´, Σ, δ´, q'_0, F´) のδ´

$\delta(\{q_1, q_2, ..., q_i\}, a) = \{p_1, p_2, ..., p_j\}$

のとき、かつそのときに限り、

$\delta'([q_1, q_2, ..., q_i], a) = [p_1, p_2, ..., p_j]$

とおく。すなわち、

Q'の元$[q_1, q_2, ..., q_i]$にδ'を適用した結果$\delta'([q_1, q_2, ..., q_i], a)$は、

Qの元$q_1, q_2, ..., q_i$にそれぞれδを適用した結果

$\delta(q_1, a), \delta(q_2, a), ..., \delta(q_i, a)$の和集合。

NFAと等価なDFAの例

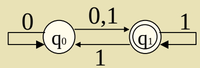
- **教科書の例(例 2.10 p.67)とは別**

$NFA: M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

とする。なお遷移関数δは、

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}, \delta(q_0, 1) = \{q_1\}$

$\delta(q_1, 0) = \phi, \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$



L(M)を受理するDFA

$DFA: M' = (Q, \{0,1\}, \delta', [q_0], F)$

$Q = \{[q_0], [q_1], [q_0, q_1], [\phi]\} = 2^{\{q_0, q_1\}}$

$\delta'([q_0], 0) = [q_0, q_1], \delta'([q_0], 1) = [q_1]$

$\delta'([q_1], 0) = \phi, \delta'([q_1], 1) = [q_0, q_1]$

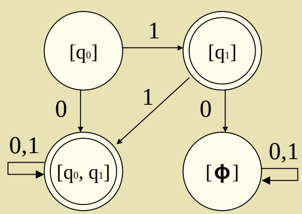
$\delta'([q_0, q_1], 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = [q_0, q_1]$

$\delta'([q_0, q_1], 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = [q_0, q_1]$

$\delta'([\phi], 0) = \delta'([\phi], 0) = [\phi]$

$F = \{[q_1], [q_0, q_1]\}$

M´の遷移図



Mで受理する記号列をM´で受理できるか？
(試してみよう)
○ 0, 1, 01, 010
× 10, 100, 101

NFAと等価なDFAの一般形(1)

NFA: M (Q, Σ, δ, q_0, F)

→ DFA: M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)

	a_0		a_n
q_0	P_{00}	…	P_{0n}
:	:	δ	:
q_k	P_{k0}	…	P_{kn}

→

	a_0		a_n
$[q_0]$	$[P_{00}]$	…	$[P_{0n}]$
:	:		:
$[q_k]$	$[P_{k0}]$	…	$[P_{kn}]$
:	:	δ´	:
$[q_0, q_1]$	$[P_{00} \cup P_{10}]$	…	$[P_{0n} \cup P_{1n}]$
:	:		:
$[q_0, \ldots, q_k]$	$[P_{00} \cup \ldots \cup P_{k0}]$	…	$[P_{0n} \cup \ldots \cup P_{kn}]$

P_{ij} :**状態q_iのとき入力a_jに対して遷移しうる状態の集合 (Qの部分集合)**

NFAと等価なDFAの一般形(2)

NFA: のF→ DFAのF´の求め方

F={q_k }

→ F´={[q_k], [q_0,q_k], …, [q_0,…, q_k,…, q_n]}

F={q_j, q_k}

→ F´={[q_j], [q_k], …, [q_0,…, q_j,…, q_k,…, q_n]}

Q´の中でFのどれかの要素を含むもの

例題

NFA: M ({p, q, r, s}, {0, 1}, δ_1, p, {s})
と等価なDFAを求めよ。なお、 δ_1は下表。

δ_1

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

Q´とF´の求め方 (総当り)

NFA: M ({p, q, r, s}, {0, 1}, δ_1, p, {s})

→ DFA: M´(Q´, Σ, δ´, q´$_0$, F´)

Q´= Qのベキ集合 (部分集合の集合)

= { [Φ],

[p], [q], [r], [s],

[p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s],

[p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s],

[p, q, r, s] }

$_4C_1$個

$_4C_2$個

$_4C_3$個

$_4C_4$個

F´

δ´の求め方 (総当り)

δ_1

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

	0	1
[Φ]	[Φ]	[Φ]
[p]	[p, q]	[p]
[q]	[r]	[r]
[r]	[s]	[Φ]
[s]	[s]	[s]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r]	[r, s]	[r]
[q, s]	[r, s]	[r, s]
[r, s]	[s]	[s]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r, s]	[r, s]	[r, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

きちんと書くと
(総当り)

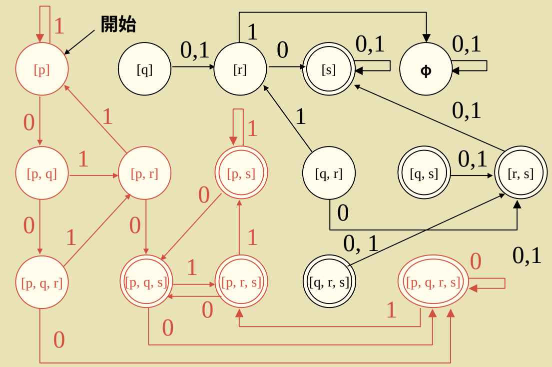
Q´= { [ϕ], [p], [q], [r], [s], [p, q], [p, r],
[p, s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

Σ ={0, 1}

q´₀=[p]

F´= { [s], [p, s], [q, s], [r, s], [p, q, s],
[p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] }

総当りでは無駄が多い
q´₀([p])からの道がない状態を含む



δ´とQ´とF´を求める
(p. 68 – 69 必要なもののみ)

δ

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

→

δ´

開始

	0	1
[p]	[p, q]	[p]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

F´

Q´

きちんと書くと
(p. 68 – 69必要なもののみ)

Q´= { [p], [p, q], [p, r], [p, s], [p, q, r],
[p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

Σ ={0, 1}

q´₀=[p]

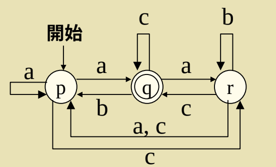
F´= { [p, s], [p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] }

補題

NFA: M ({p, q, r}, {a, b, c}, δ, p, {q})
と等価なDFAを求める。

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q



δ′とQ′とF′を求める
(補題：必要なもののみ)

δ

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q

→

δ′

開始

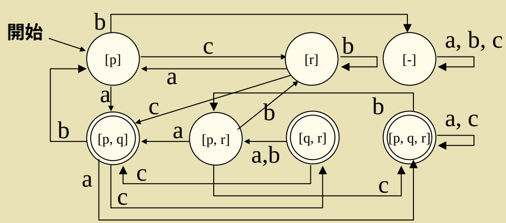
	a	b	c
[p]	[p, q]	[φ]	[r]
[r]	[p]	[r]	[p, q]
[p, q]	[p, q, r]	[p]	[q, r]
[q, r]	[p, r]	[p, r]	[p, q]
[p, r]	[p, q]	[r]	[p, q, r]
[p, q, r]	[p, q, r]	[p, r]	[p, q, r]
[φ]	[φ]	[φ]	[φ]

F′

Q′

きちんと書くと
(補題：必要なもののみ)

Q′= { [-], [p], [r], [p, r], [p, q], [q, r], [p, q, r]}
Σ={a, b, c}
q'_0=[p]
F′= { [p, q], [q, r], [p, q, r]}



最後に

- ミニテスト
  - 教科書・資料を見ても話し合っても良い
  - 状態は必要なものだけにしておこう
- ミニテストを提出して帰ること
- 次回：ε-動作を含む有限オートマトン
  教科書 2.5 (p. 80 –)