計算の理論 I

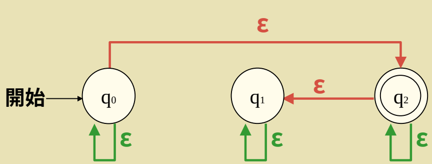
正則表現

月曜3校時
大月 美佳

今日の講義内容

1. ε-動作なしNFA→DFA訂正
2. 正規 (正則) 表現
3. ミニテスト

例1 ε-CLOSURE



	0	1	ε
q_0	q_0, q_1	-	q_2
q_1	q_2	q_0, q_1	-
q_2	q_0, q_1	-	q_1

q	ECLOSE(q)
q_0	q_0, q_1, q_2
q_1	q_1
q_2	q_1, q_2

例1 NFA

$\delta'(q_0, 0)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_0), 0)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 0))$
$= \mathrm{EClOSE}(\{q_0, q_1, q_2\})= \{q_0, q_1, q_2\}$
$\delta'(q_0, 1)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_0), 1)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 1))$
$= \mathrm{EClOSE}(\{q_0, q_1\})= \{q_0, q_1, q_2\}$
$\delta'(q_1, 0)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_1), 0)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_1\}, 0))$
$=\mathrm{EClOSE}(\{q_2\})=\{q_1, q_2\}$
$\delta'(q_1, 1)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_1), 1)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_1\}, 1))$
$= \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_0, q_1\}, 1))=\{q_0, q_1, q_2\}$
$\delta'(q_2, 0)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_2), 0)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_1, q_2\}, 0))$
$= \mathrm{EClOSE}(\{q_0, q_1, q_2\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$\delta'(q_2, 1)=\mathrm{EClOSE}(\delta(\mathrm{ECLOSE}(q_2), 1)) = \mathrm{EClOSE}(\delta(\{q_1, q_2\}, 1))$
$= \mathrm{EClOSE}(\{q_0, q_1\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$

	0	1
$*\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$*q_2$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

例1 NFA→DFA

サブセット構成法

	0	1
*→q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
*q_2	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

	0	1
*→$[q_0]$	$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$
*$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$

ε-動作を含むNFA→NFA 例2

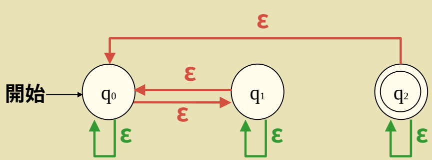
- ε-動作を含むNFA

$(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$

δは下表

	0	1	ε
q_0	q_0	-	q_1
q_1	-	q_0, q_2	q_0
q_2	q_1	q_2	q_0

例2 ε-CLOSURE



	0	1	ε
q_0	q_0	-	q_1
q_1	-	q_0, q_2	q_0
q_2	q_1	q_2	q_0

q	ECLOSE
q_0	q_0, q_1
q_1	q_0, q_1
q_2	q_0, q_1, q_2

例2 NFA

$\delta'(q_0, 0)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_0), 0))=

$\delta'(q_0, 1)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_0), 1))=

$\delta'(q_1, 0)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_1), 0))=

$\delta'(q_1, 1)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_1), 1))=

$\delta'(q_2, 0)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_2), 0))=

$\delta'(q_2, 1)$=EClOSE(δ(EClOSE(q_2), 1))=

	0	1
→q_0		
q_1		
*q_2		

例2 NFA→DFA

サブセット構成法

	0	1
→q_0		
q_1		
*q_2		

	0	1
→[q_0]		

今日の新しいこと

- **正則表現**
  1. **正則表現を使うと嬉しいこと**
  2. **前準備**
  3. **正則表現の定義**
  4. **正則表現の例**

正則表現を使えると嬉しいこと

- **パターンマッチにしょっちゅう使う**
  - UNIX**のシェル**
    - sh, csh, ksh, tcsh, bash
    - **ファイルの名前**
  - UNIX**のコマンド、プログラミング言語**
    - egrep, awk, sed, perl
    - **ファイルの中の文字列の処理**

Bash のファイル名展開

% ls
aaa，aab，aac，aba，aca，ada，abc，bbb，bcb

% echo a[abc]a
aaa aba aca

Perl での処理

Sun May 27 21:51:40 JST 2001

↓

s/¥w+ (¥w+) (¥d¥d) ¥d¥d:¥d¥d:¥d¥d ¥w+ (¥d+)/Today is ¥1 ¥2, ¥3./;

↓

Today is May 27, 2001.

前準備 その1 (記号列の集合)

- アルファベット Σ
- Σ 上の記号列 Σ*
- Σ*の部分集合 L, L_1, L_2

Σ: a, b, c

Σ*: ε, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, aab, aba, ….

L: ε, ab, bc, aba, bcca

L_1: a, bc, aca

L_2: ba, abc

前準備 その2 (記号列の集合の演算)

- $L_1L_2=\{xy \mid x\in L_1, y\in L_2\}$←連接

L_1: a, bc, aca

L_2: ba, abc

→

L_1L_2: aba, bcba, acaba, aabc, bcabc, acaabc

前準備 その3 (記号列の集合の演算)

$$\begin{cases} L^0=\{\varepsilon\} \\ L^i=LL^{i-1} \quad (i\geq 1) \end{cases}$$

L^0: ε

$L^1=L$: ba, abc

$L^2=LL^1=LL$: baba, baabc, abcba, abcabc

$L^i=LL^{i-1}=LL...L$: ba…ba, ba…abc, …, …, abc…abc

前準備 その4
(Kleene閉包)

$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$　LのKleene閉包（または単に閉包）

closure　closure

$= L^0 \cup L^1 \cup \ldots \cup L^i \cup \ldots \cup L^\infty$

L^0: ε　∪　L^1: ba, abc　∪…∪　L^∞: ba…ba, ba…abc, … …, abc…abc

↓

L^*: ε , ba, abc, …, ba…ba, ba…abc, …, abc…abc

前準備 その5
(正閉包)

$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$　Lの正閉包

positive closure

L^1: ba, abc　∪…∪　L^∞: ba…ba, ba…abc, … …, abc…abc

↓

L^+がεを含むのはLがεを含むときのみ

L^+: ba, abc, …, ba…ba, ba…abc, …, abc…abc

例

$$L_1 = \{10, 1\}$$
$$L_2 = \{011, 11\}$$
$$L_1 L_2 = \{10011, 1011, 111\}$$

$$\{10, 11\}^* = \{\varepsilon, 10, 11, 1010, 1011, 1110, 1111, \ldots\}$$
$$\{10, 11\}^+ = \{10, 11, 1010, 1011, 1110, 1111, \ldots\}$$

正則表現の定義

1. φは正則表現で、その表す集合は空集合である。
2. ε は正則表現で、その表す集合は{ ε }である。
3. Σ の各元aに対してaは正則表現で、その表す集合は{a}である。
4. rとsがそれぞれ言語RとSを表す正則表現のとき、(r+s)、(rs)、および(r*)は正則表現で、その表す集合はそれぞれ、R∪S、RS、R*である。

正則表現の例

- φ、ε、a
- (φ+ε)=φ∪{ε}={ε}
- (φ+a)=φ∪{a}={a}
- (ε+a)={ε}∪{a}={ε, a}
- (a+b)={a}∪{b}={a, b}
- <u>φε={}{ε}={}=φ</u>
- <u>φa={}{a}={}=φ</u>
- εa={ε}{a}={a}
- ab={a}{b}={ab}
- φ*={}*={ε}
- ε*={ε}*={ε}
- a*= {a}*={ε, a, aa, aaa, …}
- ((φ+ε)+a)=(ε+a)={ε}∪{a}={ε, a}
- <u>(φ(a+b))={}{a, b}={}=φ</u>
- ((ab)+ε)={ab}∪{ε}={ε, ab}
- ((ab)*)={ab}*={ε, ab, abab, ababab, … }

間違いやすい

正規表現の演算の強さ

* > 連接 > +

- ((0(1*))+0) → 01*+0
- (1+(10))* → (1+10)*
- ((1(1(1*)))+(01)) → (111*+01)

正則表現と集合の例1

- 00={00}
- (0+1)*={0, 1}*
  ={ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, …}
- (1+10)*={1, 10}*
  ={ε, 1, 10, 11, 110, 101, 1010, … }
- (0+ε)(1+10)*={0, ε}{1, 10}*
  ={0, ε} {ε, 1, 10, 11, 110, 101, 1010, … }
  = {ε, 0, 1, 01, 10, 010, 11, 011, 110, 0110, 101, 0101, 1010, 01010, … }

正則表現と集合の例2

- (0+1)*011={0, 1}*011
  ={ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, …}{011}
  ={011, 0011, 1011, 00011, 01011, 10011, 11011, … }
- 0*1*2*={0}*{1}*{2}* ← 図2.8のNFA
  ={ε, 0, 00, … }{ε, 1, 11, … } {ε, 2, 22, … }
  = {ε, 0, 1, 01, 012, 00, 001, 0011, 0012, 00112, 001122, 000, 0001, 00011, 00012, 000111, 000112, 0001112, 00011122, 000111222, … }

(1+10)*の性質

- **1で始まり、連続した0を含まない列か空列から成る集合**

→帰納法で示す。

$(1+10)^* = \{1,10\}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{1,10\}^i$

$i = n$のとき、$\bigcup_{i=0}^{n} \{1,10\}^i$が
1で始まり連続した0を含まない列か空列のみから成るためには
$\{1,10\}^0, \ldots, \{1,10\}^n$がそれぞれ
連続した0を含まない列か空列のみからなっていればよい。

帰納法での証明つづき

1. $i = 0$のとき、$\{1,10\}^0 = \{\varepsilon\}$
2. $i = 1$のとき、$\{1,10\}^1 = \{1,10\}$
   で、1で始まり連続した0を含まない列のみを含む。
3. $i = \mathrm{n}$のとき、

$\{1,10\}^{\mathrm{n}}$が$\{1x_1, \ldots, 1x_k\}$のように
1で始まり連続した0を含まない列のみを含む
とすれば($x_1, \ldots, x_k$は連続した0を含まない列)、
$i = n+1$のとき、
$\{1,10\}^{n+1} = \{1,10\}\{1,10\}^n = \{11x_1, 101x_1 \ldots, 11x_k, 101x_k\}$
となり、1で始まり連続した0を含まない列のみを含むようになる。
よって1,2,3より、
$(1+10)^*$は1で始まり連続した0を含まない列か空列のみを含む。

その他の演算について

$$r + s = s + r$$
$$(r + s) + t = r + (s + t)$$
$$(rs)t = r(st)$$
$$r(s + t) = rs + rt$$
$$(r + s)t = rt + st$$

$$\phi^* = \varepsilon$$
$$(r^*)^* = r^*$$
$$(\varepsilon + r)^* = r^*$$
$$(r^* s^*)^* = (r + s)^*$$

証明できるかな？

ミニテスト と次回内容

- **ミニテスト**
  教科書･資料を見ても、友達と相談しても良い
  15分後に指名された人は板書
- **ミニテストを提出すること**
  出したら帰って良し
- **次回(6/16)内容**
  正則表現とFAとの等価性