

計算の理論 I

正則表現とFAとの等価性

月曜3校時
大月 美佳

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

1

今日の講義内容

1. 正則表現補足
2. 正則表現とFAの等価性
 1. 正則表現 -NFA
 2. DFA(NFA) 正則表現
3. ミニテスト

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

2

正規表現補足

慣れるためには、訓練が必要。

1. $(00+1)^*$ のバリエーション
 $(000+1)^*$: 0の個数が3の倍数連続
 $(0000+1)^*$: 0の個数が4の倍数連続
2. 記号の連続の制限
 $(1+01)^*(+0)$: 2個以上連続0を含まない
3. いろいろと当たってみる
教科書3.1.4 p.98 ~ 99

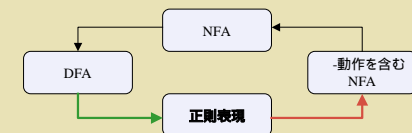
平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

3

今日の新しいこと

1. 正則表現とFAの等価性



1. 正則表現からの -動作を含むNFAの作り方
p.111 ~ 116 3.2.3項 (例3.8, p. 115)
2. DFAからの正則表現の作り方
p.100 ~ 111 3.2.1, 3.2.2項 (例3.5, p. 103, 例3.6, p.109)

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

4

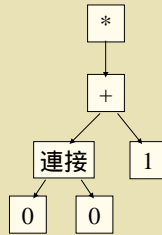
正則表現からの -動作を含む NFAの作り方

1. 括弧つきに書き換える

$$(00+1) \quad ((00)+1)^*$$

2. 分解していく

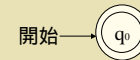
1. $r = r_1^*$
2. $r_1 = r_2+r_3, r_3=1$
3. $r_2 = r_4+r_5, r_4=1, r_5=1$



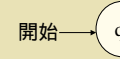
NFAの作り方 (定理3.7 図3.16 p.113)

3. 末端(最小構成)をFAに変換する

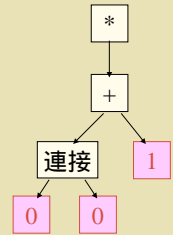
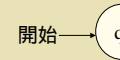
1. $r =$



2. $r =$



3. $r = a$



NFAの作り方 (定理3.7 図3.17 p.113)

3. 末端から根に向かってどんどん変換する

1. $r = r_1+r_2$
図3.17 (a)
2. $r = r_1r_2$
図3.17 (b)
3. $r = r_1^*$
図3.17 (c)

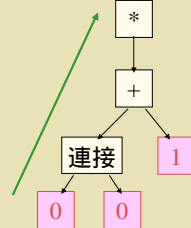


図3.17(a)

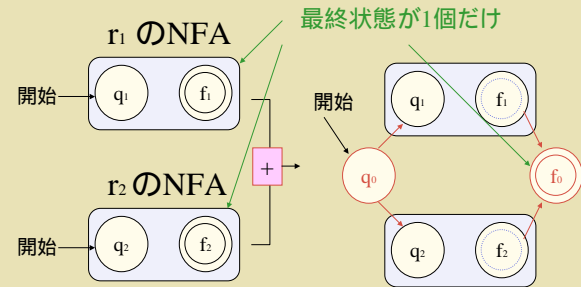


図3.17(b)

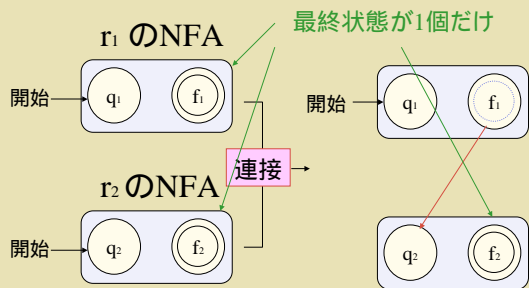
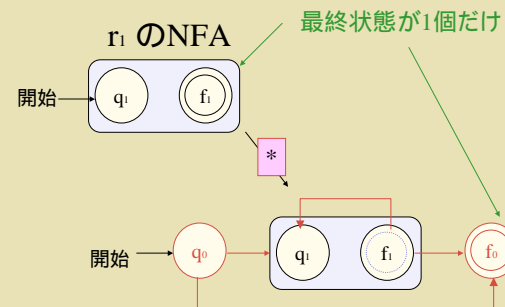
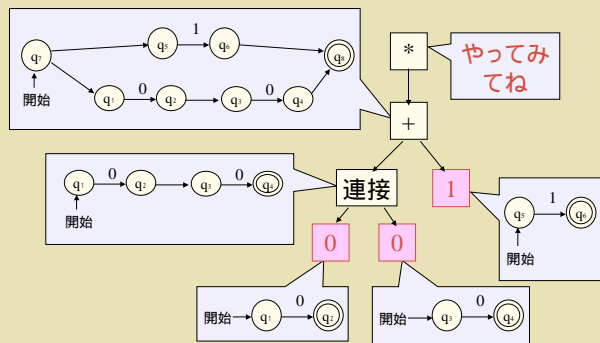


図3.17(c)



どんどんやってみる



NFAの生成例

正規表現 : 01^*+1

1. 括弧つきに書き換える

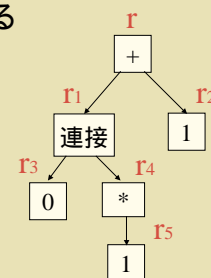
$$01^*+1 \quad ((0(1^*)) + 1)$$

2. 分解していく

1. $r = r_1 + r_2, r_1 = 0(1^*), r_2 = 1$

2. $r_1 = r_3 r_4, r_3 = 0, r_4 = 1^*$

3. $r_4 = r_5^*, r_5 = 1$

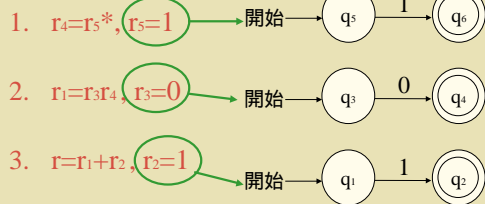


NFAの生成例 (つづき 1)

正規表現: 01^*+1

3. 最小構成をFAに変換する

4. FAを組みあげていく



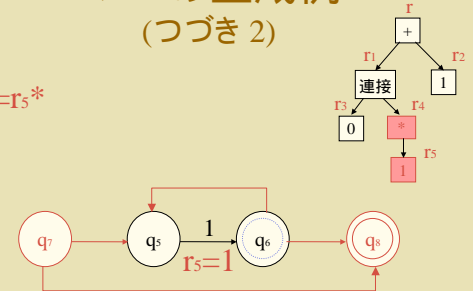
平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

13

NFAの生成例 (つづき 2)

4.1. $r_4=r_5^*$



平成15年6月16日

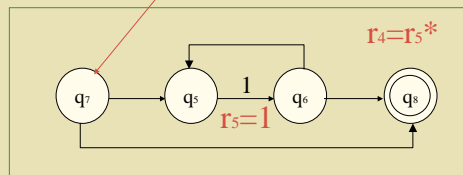
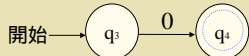
佐賀大学知能情報システム学科

14

NFAの生成例 (つづき 3)

4.2. $r_1=r_3r_4$

$r_3=0$



平成15年6月16日

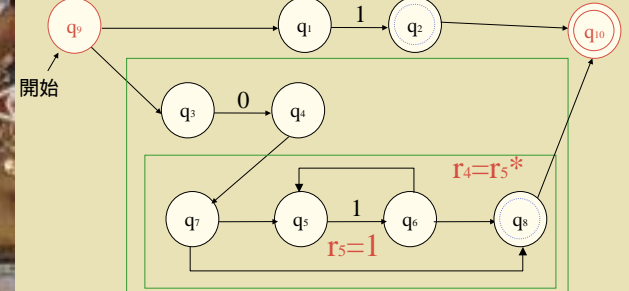
佐賀大学知能情報システム学科

15

NFAの生成例 (つづき 4)

4.3. $r=r_1+r_2$

$r_2=1$



平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

16

DFA 正則表現 (3.2.1項 p.100 ~)

考え方

1. ある状態からある状態の間の状態を0からひとつずつ増やしていき、
2. 状態の任意の組からなる道が生成することのできる文字列の正則表現を再帰的に拡張していき、
3. 最後に、初期状態から最終状態への道が生成できる文字列の正則表現を求める。

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

17

数学的に定義

- ◆ Mの状態を q_i から途中 q_j より大きな番号の状態を通らずに、 q_j にたどり着くことのできる入力列の集合

$$\begin{cases} R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1} & (k \geq 1) \\ R_{ij}^0 = \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & (i = j \text{ のとき}) \\ R_{ij}^0 = \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

18

正則表現の式との対応

$$\begin{cases} R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1} & (k \geq 1) \\ R_{ij}^0 = \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & (i = j \text{ のとき}) \\ R_{ij}^0 = \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

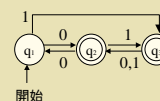
$$\begin{cases} r_{ij}^k = r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1} + r_{ij}^{k-1} & (k \geq 1) \\ r_{ij}^0 = a + \varepsilon & (i = j \text{ のとき}) \\ r_{ij}^0 = a & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

19

正則表現の生成例その1



$$\begin{aligned} r_{11}^0 &= \{a \mid \delta(q_1, a) = q_1\} + \varepsilon = \varepsilon & (1=1) \\ r_{12}^0 &= \{a \mid \delta(q_1, a) = q_2\} = 0 & (1 \neq 2) \\ r_{13}^0 &= \{a \mid \delta(q_1, a) = q_3\} = 1 & (1 \neq 3) \\ r_{21}^0 &= \{a \mid \delta(q_2, a) = q_1\} = 0 & (2 \neq 1) \\ r_{22}^0 &= \{a \mid \delta(q_2, a) = q_2\} + \varepsilon = \varepsilon & (2=2) \\ r_{23}^0 &= \{a \mid \delta(q_2, a) = q_3\} = 1 & (2 \neq 3) \\ r_{31}^0 &= \{a \mid \delta(q_3, a) = q_1\} = & (3 \neq 1) \\ r_{32}^0 &= \{a \mid \delta(q_3, a) = q_2\} = 0+1 & (3 \neq 2) \\ r_{33}^0 &= \{a \mid \delta(q_3, a) = q_3\} + \varepsilon = \varepsilon & (3=3) \end{aligned}$$

	0	1
q1	q1	q2
q2	q1	q3
q3	q3	q3

平成15年6月16日

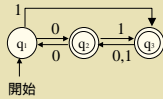
佐賀大学知能情報システム学科

20

どんどん進める

k=1

$$\begin{aligned}
 r_{11}^1 &= r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{11}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon \\
 r_{12}^1 &= r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{12}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)0 + 0 = 0 + 0 = 0 \\
 r_{13}^1 &= r_{11}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{13}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)1 + 1 = 1 + 1 = 1 \\
 r_{21}^1 &= r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{21}^0 = 0(\varepsilon^*)\varepsilon + 0 = 0 + 0 = 0 \\
 r_{22}^1 &= r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{22}^0 = 0(\varepsilon^*)0 + \varepsilon = 00 + \varepsilon \\
 r_{23}^1 &= r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{23}^0 = 0(\varepsilon^*)1 + 1 = 01 + 1 \\
 r_{31}^1 &= r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{31}^0 = (\varepsilon^*)\varepsilon + = \\
 r_{32}^1 &= r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{32}^0 = (\varepsilon^*)0 + 0 + 1 = 0 + 1 \\
 r_{33}^1 &= r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{33}^0 = (\varepsilon^*)1 + \varepsilon = \varepsilon
 \end{aligned}$$



平成15年6月16日

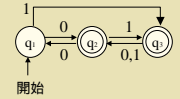
佐賀大学知能情報システム学科

21

どんどん進める

k=2

$$\begin{aligned}
 r_{11}^2 &= r_{11}^1(r_{11}^{1*})r_{11}^1 + r_{11}^1 = 0((00 + \varepsilon)^*)0 + \varepsilon = 0(00)^*0 + \varepsilon = (00)^* \\
 r_{12}^2 &= r_{11}^1(r_{11}^{1*})r_{12}^1 + r_{12}^1 = 0((00 + \varepsilon)^*)(00 + \varepsilon) + 0 = 0(00)^*0 + 0 = 0(00)^* \\
 r_{13}^2 &= r_{11}^1(r_{11}^{1*})r_{13}^1 + r_{13}^1 = 0((00 + \varepsilon)^*)(01 + 1) + 1 = 0(00)^*(0 + \varepsilon)1 + 1 \\
 &= 00^*1 + 1 = 0^*1 \\
 r_{21}^2 &= r_{21}^1(r_{11}^{1*})r_{11}^1 + r_{21}^1 = (00 + \varepsilon)((00 + \varepsilon)^*)0 + 0 = (00)^*0 + 0 = (00)^*0 \\
 r_{22}^2 &= r_{21}^1(r_{11}^{1*})r_{12}^1 + r_{22}^1 = (00 + \varepsilon)((00 + \varepsilon)^*)(00 + \varepsilon) + (00 + \varepsilon) \\
 &= (00)^*00 + \varepsilon = (00)^* \\
 r_{23}^2 &= r_{21}^1(r_{11}^{1*})r_{13}^1 + r_{23}^1 = (00 + \varepsilon)((00 + \varepsilon)^*)(01 + 1) + (01 + 1) \\
 &= (00)^*(0 + \varepsilon)1 + 01 + 1 = 0^*1 + 01 + 1 = 0^*1 \\
 r_{31}^2 &= r_{31}^1(r_{11}^{1*})r_{11}^1 + r_{31}^1 = (0 + 1)((00 + \varepsilon)^*)0 + = (0 + 1)(00)^*0 \\
 r_{32}^2 &= r_{31}^1(r_{11}^{1*})r_{12}^1 + r_{32}^1 = (0 + 1)((00 + \varepsilon)^*)(00 + \varepsilon) + (0 + 1) \\
 &= (0 + 1)(00)^*0 + (0 + 1) = (0 + 1)(00)^* \\
 r_{33}^2 &= r_{31}^1(r_{11}^{1*})r_{13}^1 + r_{33}^1 = (0 + 1)((00 + \varepsilon)^*)(01 + 1) + \varepsilon \\
 &= (0 + 1)(00)^*(01 + 1) + \varepsilon = (0 + 1)(00)^*(0 + \varepsilon)1 + \varepsilon = (0 + 1)0^*1 + \varepsilon
 \end{aligned}$$



平成15年6月16日

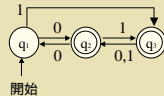
佐賀大学知能情報システム学科

22

最終状態への道

k=3

$$\begin{aligned}
 r_{12}^3 &= r_{13}^2(r_{33}^{2*})r_{32}^2 + r_{12}^2 \\
 &= (0^*1)((0 + 1)0^*1 + \varepsilon)^*(0 + 1)(00)^*0 + 0(00)^* \\
 &= 0^*1((0 + 1)0^*1)^*(0 + 1)(00)^*0 + 0(00)^* \\
 r_{13}^3 &= r_{13}^2(r_{33}^{2*})r_{33}^2 + r_{13}^2 \\
 &= 0^*1(((0 + 1)0^*1 + \varepsilon)^*)((0 + 1)0^*1 + \varepsilon) + (0^*1) \\
 &= 0^*1((0 + 1)0^*1)^*((0 + 1)0^*1 + \varepsilon) + 0^*1 \\
 &= 0^*1((0 + 1)0^*1)^*
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 r_{12}^3 + r_{13}^3 &= 0^*1((0 + 1)0^*1)^*(0 + 1)(00)^*0 + (00)^*0 + 0^*1((0 + 1)0^*1)^* \\
 &= 0^*1((0 + 1)0^*1)^*((0 + 1)(00)^*0 + \varepsilon) + 0(00)^*
 \end{aligned}$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

23

まとめ方が難しい？

以下のルールを活用せよ

$$\begin{aligned}
 r + s &= s + r & * &= \varepsilon \\
 (r + s) + t &= r + (s + t) & (r^*)^* &= r^* \\
 (rs)t &= r(st) & (\varepsilon + r)^* &= r^* \\
 r(s + t) &= rs + rt & (r^*s^*)^* &= (r + s)^* \\
 (r + s)t &= rt + st
 \end{aligned}$$

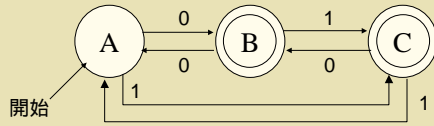
平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

24

正則表現の生成例その2

下の状態図に対応する正則表現を求めよ。

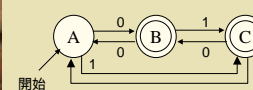


平成15年6月16日

佐賀大学情報システム学科

25

とりあえず番号をつける



1から!

A 1

B 2

C 3

A → A	$r_{11}^0 = \varepsilon$
A → B	$r_{12}^0 = 0$
A → C	$r_{13}^0 = 1$
B → A	$r_{21}^0 = 0$
B → B	$r_{22}^0 = \varepsilon$
B → C	$r_{23}^0 = 1$
C → A	$r_{31}^0 = 1$
C → B	$r_{32}^0 = 0$
C → C	$r_{33}^0 = \varepsilon$

平成15年6月16日

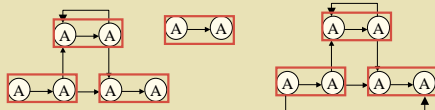
佐賀大学情報システム学科

26

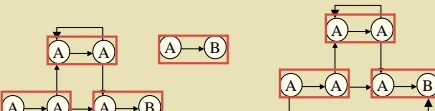
状態Aが加わった

k=1 その1

$$r_{11}^1 = r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 + r_{11}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon$$



$$r_{12}^1 = r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 + r_{12}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)0 + 0 = 0 + 0 = 0$$



平成15年6月16日

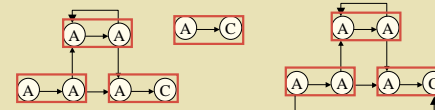
佐賀大学情報システム学科

27

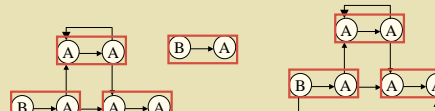
状態Aが加わった

k=1 その2

$$r_{13}^1 = r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 + r_{13}^0 = \varepsilon(\varepsilon^*)1 + 1 = 1 + 1 = 1$$



$$r_{21}^1 = r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 + r_{21}^0 = 0(\varepsilon^*)\varepsilon + 0 = 0\varepsilon + 0 = 0$$



平成15年6月16日

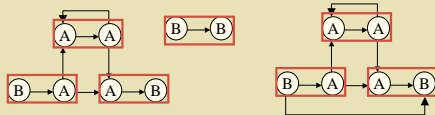
佐賀大学情報システム学科

28

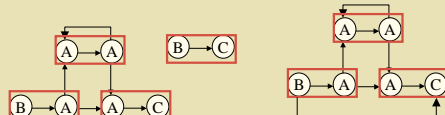
状態Aが加わった

k=1 その3

$$r_{22}^1 = r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{22}^0 = 0(\varepsilon^*)0 + \varepsilon = 00 + \varepsilon$$



$$r_{23}^1 = r_{21}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{23}^0 = 0(\varepsilon^*)1 + 1 = 01 + 1$$



平成15年6月16日

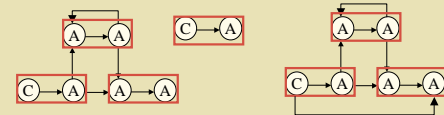
佐賀大学知能情報システム学科

29

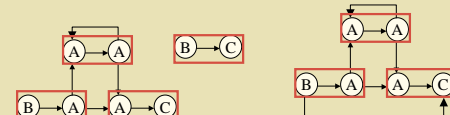
状態Aが加わった

k=1 その4

$$r_{31}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{11}^0 + r_{31}^0 = 1(\varepsilon^*)\varepsilon + 1 = 1 + 1 = 1$$



$$r_{32}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{12}^0 + r_{32}^0 = 1(\varepsilon^*)0 + 0 = 10 + 0$$



平成15年6月16日

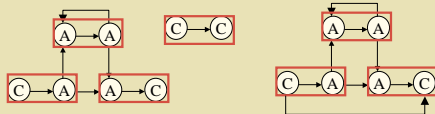
佐賀大学知能情報システム学科

30

状態Aが加わった

k=1 その5

$$r_{33}^1 = r_{31}^0(r_{11}^{0*})r_{13}^0 + r_{33}^0 = 1(\varepsilon^*)1 + \varepsilon = 11 + \varepsilon$$



$$\begin{array}{lll} r_{11}^1 = \varepsilon & r_{21}^1 = 00^* & r_{31}^1 = 1 \\ r_{12}^1 = 0 & r_{22}^1 = 00 + \varepsilon & r_{32}^1 = 10 + 0 \\ r_{13}^1 = 1 & r_{23}^1 = 01 + 1 & r_{33}^1 = 11 + \varepsilon \end{array}$$

平成15年6月16日

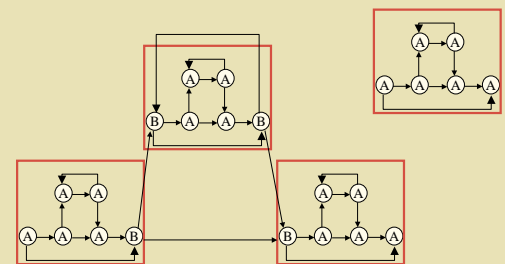
佐賀大学知能情報システム学科

31

さらに状態Bが加わった

k=2 例1

$$\begin{aligned} r_{11}^2 &= r_{12}^1(r_{22}^{1*})r_{21}^1 + r_{11}^1 = 0((00 + \varepsilon)^*)00^* + \varepsilon \\ &= 0(00)^*00^* + \varepsilon \end{aligned}$$



平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

32

どんどん進める

k=2

$$r_{12}^2 = r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 + r_{12}^1 = 0((00+\varepsilon)^*(00+\varepsilon) + 0) = 0(00)^* + 0 = 0(00)^*$$

$$r_{13}^2 = r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 + r_{13}^1 = 0((00+\varepsilon)^*(01+1) + 1) = 0(00)^*(0+\varepsilon)1 + 1 = 00^*1 + 1 = 0^*1$$

$$r_{21}^2 = r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 + r_{21}^1 = (00+\varepsilon)((00+\varepsilon)^*00^* + 00^*) = (00)^*00^* + 00^* = (00)^*00^*$$

$$r_{22}^2 = r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 + r_{22}^1 = (00+\varepsilon)((00+\varepsilon)^*(00+\varepsilon) + (00+\varepsilon)) = (00)^*$$

$$r_{23}^2 = r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 + r_{23}^1 = (00+\varepsilon)((00+\varepsilon)^*(01+1) + (01+1)) = ((00)^* + \varepsilon)(01+1) = (00)^*(0+\varepsilon)1 = 0^*1$$

$$r_{31}^2 = r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{31}^1 + r_{31}^1 = (10+0)((00+\varepsilon)^*00^* + 1) = (10+0)(00)^*00^* + 1$$

$$r_{32}^2 = r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{32}^1 + r_{32}^1 = (10+0)((00+\varepsilon)^*(00+\varepsilon) + (10+0)) = (10+0)((00)^* + \varepsilon) = (10+0)(00)^*$$

$$r_{33}^2 = r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{33}^1 + r_{33}^1 = (10+0)((00+\varepsilon)^*(01+1) + (11+\varepsilon)) = (10+0)(00)^*(0+\varepsilon)1 + 11 + \varepsilon = (10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

33

最終状態への道

k=3

$$r = r_{12}^3 + r_{13}^3$$

$$r_{21}^1 = (00)^*00^*$$

$$r_{12}^3 = r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{12}^2$$

$$r_{22}^1 = (00)^*$$

$$r_{13}^3 = r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 + r_{13}^2$$

$$r_{23}^1 = 0^*1$$

$$r_{11}^1 = 0(00)^*00^* + \varepsilon$$

$$r_{31}^2 = (10+0)(00)^*00^* + 1$$

$$r_{12}^2 = 0(00)^*$$

$$r_{32}^2 = (10+0)(00)^*$$

$$r_{13}^1 = 0^*1$$

$$r_{33}^2 = (10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

34

最終解

k=3

$$r_{12}^2 = 0(00)^* \quad r_{32}^2 = (10+0)(00)^*$$

$$r_{13}^1 = 0^*1 \quad r_{33}^2 = (10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon$$

$$r_{12}^3 = 0^*1((10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon)^*(10+0)(00)^* + 0(00)^* = 0^*1((10+0)0^*1 + 11)^*(10+0)(00)^* + 0(00)^* = 0^*1((10+0)0^*1)^*(11)^*(10+0)(00)^* + 0(00)^*$$

$$r_{13}^3 = 0^*1((10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon)^*((10+0)0^*1 + 11 + \varepsilon) + 0^*1 = 0^*1((10+0)0^*1 + 11)^* + 0^*1 = 0^*1((10+0)0^*1)^*(11)^* + 0^*1$$

$$r_{12}^3 + r_{13}^3 = 0(00)^* + 0^*1(\varepsilon + (((10+0)0^*1)^*(11)^*)^*(\varepsilon + (10+0)(00)^*))$$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

35

状態消去法

(3.2.2項 p.105 ~)

- ◆ 状態を正則表現に順次置き換えていく

 1. オートマトンの全ての辺のラベルを正則表現に書き改める
 2. 受理状態 q と開始状態 q_0 のみを残して、後は消去する(消去法: p.106-107, 図3.7 図3.8)
 3. $q = q_0$ の場合には、この2状態オートマトンに図3.9(p.108)のようなラベル付けをする
 4. $q \neq q_0$ の場合には、この1状態オートマトンに図3.10(p.109)のようなラベル付けをする
 5. 3と4の和から全体を求める

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

36

消去後のFAと正規表現

図3.9 p.108

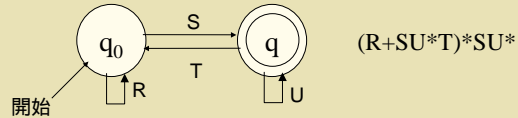
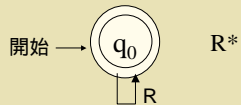
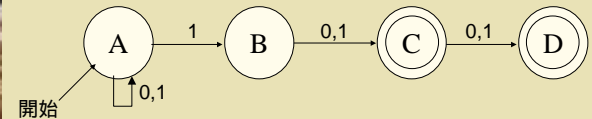


図3.10 p.109



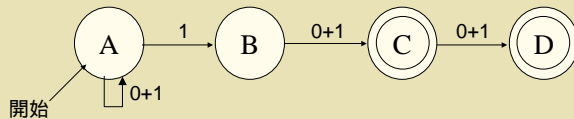
状態消去法の例 (例3.6 p.109)

- ◆ 末尾から2文字目か3文字目に1がある列の全体を受理するFA



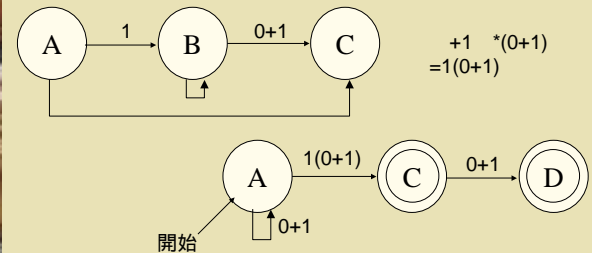
ラベルの書き換え

- ◆ 正規表現に書き換える



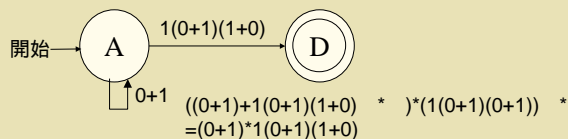
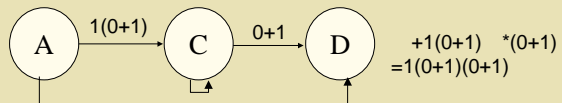
状態Bの消去

- ◆ 繰り返し作業を省くためこの時点で消去



状態Cの消去

- ◆ (A, D)の組用



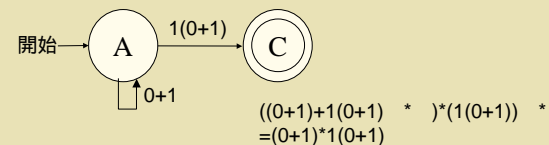
平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

41

状態Dの消去

- ◆ (A, C)の組用



平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

42

最終的な正規表現

- ◆ (A, C)と(A, D)の正規表現の和
 $(0+1)*1(0+1)+(0+1)*1(0+1)(0+1)$

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

43

ミニテストと次回内容

- ◆ ミニテスト
教科書・資料を見ても、友達と相談しても良い
15分後に指名された人は板書
- ◆ ミニテストを提出すること
出したら帰ってよし
- ◆ 次回(6/23)内容
DFAの最小化

平成15年6月16日

佐賀大学知能情報システム学科

44