

計算の理論 I

プッシュダウンオートマトン

月曜3校時
大月 美佳

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

1

今日の講義内容

1. プッシュダウンオートマトン(PDA)
 - 定義
 - 計算(クラスCFL)
 - 構文木と最左導出
- ◆ ミニテスト
- ◆ レポート出題

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

2

レポートについて(再掲)

- ◆ 〆切: 2003年7月14日 講義終了時
- ◆ 内容:
 - 正則表現 -NFA DFA 最小のDFA
- 注意:
 - NFAからいきなり最小化はできない
 - DFAが最小に見えても穴埋めアルゴリズムを使って最小であることを示すこと
- ◆ 配点: 100点中20点

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

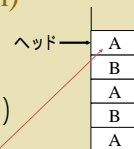
3

プッシュダウンオートマトン (pushdown automaton)

PDA=FA+プッシュダウンストア

- ◆ **プッシュダウンストア**(スタック)

- 記号列を記憶している
- プッシュダウンヘッドが一番上の記号を指す
- 一番上の記号(**トップ記号**)のみ読める
- 2つの操作
 - **プッシュ**(push): 新たな記号列を積む
 - **ポップ**(pop): トップ記号を取り除く



平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

4

PDAの定義

◆ プッシュダウンオートマトン

(pushdown automaton (pda))

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F)$

Q : 状態の有限集合。

Σ : 入力アルファベット。

Γ : プッシュダウンストアのアルファベット

δ : 遷移関係 = 遷移の集合

$Q \times (\Sigma \cup \Gamma) \times \Gamma \times Q \times \Gamma^*$ の有限部分集合。

(q, a, Z, p, γ) のとき、 (p, γ) (q, a, Z) と書く。

q_0 : 初期状態、 $q_0 \in Q$

Z_0 : 初期記号、 $Z_0 \in \Gamma$

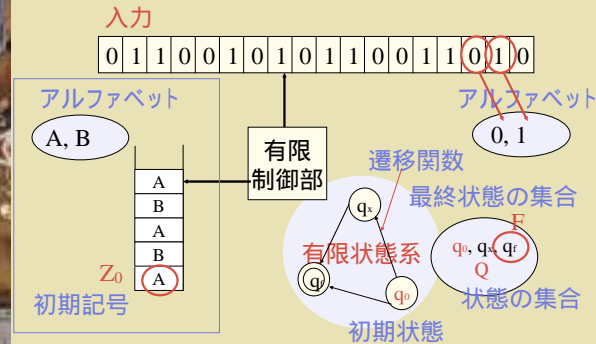
F : 最終状態の集合、 $F \subseteq Q$

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

5

PDAの模式図



平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

6

時点表示

(instantaneous description)

◆ 時点表示とは、

PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F)$ に対して、

状態 $q \in Q$, 入力 $w \in \Sigma^*$, 記号列 $\gamma \in \Gamma^*$

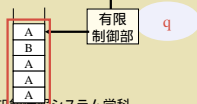
から成る組 (q, w, γ)

読み残し

$w=10110011010$

01110011010110011010

プッシュダウン
ストアの内容
=ABAAA



平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

7

M

◆ M の定義

$Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ から $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ への関係
 $(q, ax, Z) \in M(p, x, \gamma)$

$(p, \gamma) \rightarrow (q, a, Z)$

$p, q \in Q, a \in \Sigma, \gamma \in \Gamma^*, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*$

読み方:

遷移 $(p, \gamma) \rightarrow (q, a, Z)$ によって、
 計算状態 (q, ax, Z) から (p, x, γ) に動作する。

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

8

動作

(-move)

- 遷移(p,) (q, a, Z)において、a= のとき、入力記号を読み込まずに動作すること。

$$(q, x, Z) \rightarrow M(p, x,)$$

- Zがポップされ、 がプッシュされる。
- プッシュダウンストアが空のときは動作は起こらない。

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

9

PDAの例

PDA

$$M=(Q, , , , q_0, Z_0, F)$$

$$Q=\{q_0, q_1, q_2\},$$

$$=\{0, 1\},$$

$$=\{Z_0, 0, 1\},$$

$$F=\{q_2\}$$

を右表とする。

q	a	Z	(q, a, Z)
q ₀	0	Z ₀	{(q ₀ , 0Z ₀), (q ₁ , 0Z ₀)}
q ₀	1	Z ₀	{(q ₀ , 1Z ₀), (q ₁ , 1Z ₀)}
q ₀	0	0	{(q ₀ , 00), (q ₁ , 00)}
q ₀	0	1	{(q ₀ , 01), (q ₁ , 01)}
q ₀	1	0	{(q ₀ , 10), (q ₁ , 10)}
q ₀	1	1	{(q ₀ , 11), (q ₁ , 11)}
q ₁	0	0	{(q ₁ ,)}
q ₁	1	1	{(q ₁ ,)}
q ₁		Z ₀	{(q ₂ ,)}

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

10

例の動作

$$(q_0, 0100101, Z_0) \rightarrow M(q_0, 100101, 0Z_0)$$

$$M(q_0, 00101, 10Z_0)$$

$$M(q_1, 0101, 010Z_0)$$

$$M(q_1, 101, 10Z_0)$$

$$M(q_1, 01, 0Z_0)$$

$$M(q_1, 1, Z_0)$$

$$M(q_2, 1,)$$

q	a	Z	(q, a, Z)
q ₀	0	Z ₀	{(q ₀ , 0Z ₀), (q ₁ , 0Z ₀)}
q ₀	1	Z ₀	{(q ₀ , 1Z ₀), (q ₁ , 1Z ₀)}
q ₀	0	0	{(q ₀ , 00), (q ₁ , 00)}
q ₀	0	1	{(q ₀ , 01), (q ₁ , 01)}
q ₀	1	0	{(q ₀ , 10), (q ₁ , 10)}
q ₀	1	1	{(q ₀ , 11), (q ₁ , 11)}
q ₁	0	0	{(q ₁ ,)}
q ₁	1	1	{(q ₁ ,)}
q ₁		Z ₀	{(q ₂ ,)}

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

11

$$^*M, \quad {}^tM$$

- *M
= Mの反射的かつ推移的閉包

- tM
=(p₀, w₀,) M(p₁, w₁,) M... M(p_t, w_t,)
t: 計算のステップ数

- 省略形

$$^* \quad {}^t$$

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

12

2種類の受理

1. 最終状態によって受理

入力 w に対して、 $q \in F$ と $*$ が存在して

$(q_0, w, Z_0) \vdash^* M(q, \gamma, Z)$

$L(M)$: 最終状態によって受理される記号列の集合

— 最終状態と空スタアによって受理

入力 w に対して、 $q \in F$ が存在して

$(q_0, w, Z_0) \vdash^* M(q, \gamma, Z)$

$N(M)$: 最終状態と空スタアによって受理される記号列の集合

受理の例

$(q_0, 0110, Z_0) \vdash^* M(q_0, 110, 0Z_0)$

q	a	Z	$\delta(q, a, Z)$
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \gamma)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \gamma)\}$
q_1		Z_0	$\{(q_2, \gamma)\}$

$M(q_1, 10, 10Z_0)$

$M(q_1, 0, 0Z_0)$

$M(q_1, \gamma, Z_0)$

$M(q_2, \gamma, \gamma)$

$0110 \in L(M)$ かつ $0110 \in N(M)$

$L(M) = N(M) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
 w^R は w の反転

2つの受理は同値

言語 L $*$ に対して、次の(1)(2)は同値

(1) あるPDA M に対して $L=L(M)$ となる。

(2) あるPDA M に対して $L=N(M)$ となる。

証明ステップ a

$L(M)$ な M から変換

$L=L(M)$ な $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, F)$

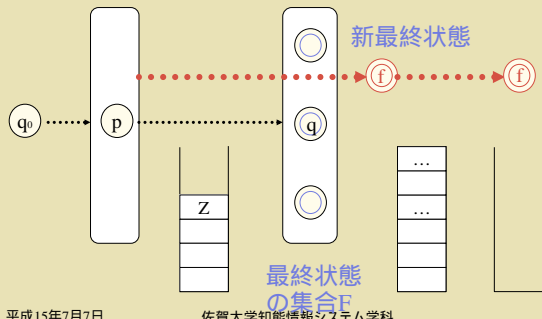
から、 $M'=(Q \cup \{f\}, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \{f\})$

を作る。 δ' は δ に次の遷移を加えたもの。

(i) $(q, \gamma) \vdash^* (p, a, Z)$ かつ $q \in F$ のとき、
 $(q, \gamma) \vdash^* (f, \gamma)$
 $(q, \gamma) \vdash^* (p, a, Z)$

(ii) すべての Z に対して $(f, \gamma) \vdash^* (f, \gamma, Z)$

変換の意味 a



平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

17

証明ステップ b N(M')なM'から変換

$L=N(M')$ な $M=(Q', \Sigma', \delta', q_0', Z_0', F')$
から、 $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, S, F)$
を作る。

$$Q=Q' \cup \{q_0, f\} \quad (\text{ただし } q_0, f \notin Q')$$

$$\Sigma = \Sigma' \cup \{S\} \quad (\text{ただし } S \notin \Sigma')$$

$$F=\{f\}$$

δ は δ' に次の遷移を加えたもの。

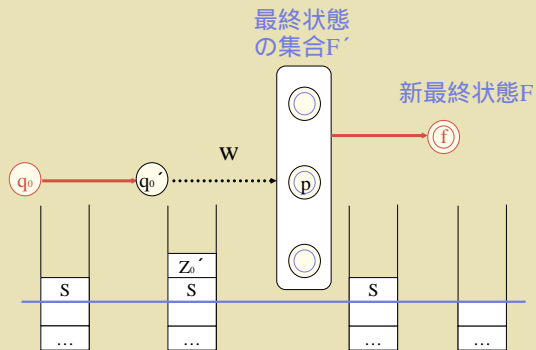
- (i) $(q_0, S, \delta) = \{(q_0', Z_0', S)\}$
- (ii) $(p, S, \delta) = \{(f, \epsilon)\}$ ただし $p \in F'$

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

18

変換の意味 b



平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

19

ミニテストと次回内容

- ◆ ミニテスト
教科書・資料を見ても、友達と相談しても良い
- ◆ ミニテストを提出すること
出したら帰ってよし
- ◆ 次回(7/14)内容
反復補題(たぶん)

平成15年7月7日

佐賀大学知能情報システム学科

20