計算の理論 II
帰納的関数2

月曜4校時
大月美佳

講義の前に

- JABEE審査員が見学に来ます
- 来週はお休みなので、レポートがあります

今日の講義内容

1. **原始帰納的関数の復習**
   1. **初期関数**
   2. **合成と原始帰納**
2. **原始帰納的集合と述語**

原始帰納的関数

- **計算可能な関数の一部**
- **原始帰納的関数**

  ー拡大→帰納的関数＝計算できる関数の族

  帰納的関数＝Turing機械で受理できる言語

帰納的関数＝計算可能

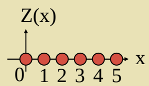
原始帰納的関数

初期関数

- **原始帰納的関数の素。**

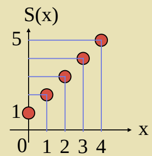
(1) $Z(x)=0$

どんなx**も**0**にしてしまう。**



(2) $S(x)=x+1$

x**に**1**を加える。**



(3) $U_n^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)=x_i$

i**番目の**x_i**を取り出す。**

これらに操作を加えて原始帰納的関数を作成する。

合成と原始帰納

- **初期関数に加える操作**

(I) **合成**

r**変数の関数**h**と**r**個の**n**変数関数**$g_i(1 \leqq i \leqq r)$**から、**

n**変数の関数**f**を以下の操作で作ること。**

$f(x_1, \ldots, x_n)=h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n))$

(II) **原始帰納** (primitive recursion)

n-1**変数の関数**g**と**n+1**変数の関数**h**から、**

n**変数の関数**f**を以下の操作で作ること。**

$f(x_1, \ldots, x_n)=g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ($x_n=0$**のとき**)

$f(x_1, \ldots, x_n)=h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n-1, f(x_1, \ldots, x_n-1))$ ($x_n>0$**のとき**)

原始帰納的関数
(primitive recursive)

- **定義**

初期関数(1), (2), (3)**に**

操作(I), (II)**を**

有限回(0**回以上**)**適用して**

得られた関数。

原始帰納的関数の例

(4) **定数関数** $C_n^k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)=k$

(5) x_1+x_2

(6) $x_1 \cdot x_2$

(7) x^y

(8) $x_1!$

については前回計算練習までしてみた。

原始帰納的関数の例 (9)

(9) $pd(x_1)$を

$pd(x_1)=0$ ($x_1=0$のとき)

$pd(x_1)= x_1-1$ ($x_1>0$のとき)

とおくと、 $g(k)$

$pd(x_1)=Z(k)=0$ ($x_1=0$のとき)

$pd(x_1)=p(x_1-1, pd(x_1-1))=x_1-1$ ($x_1>0$のとき)

$h(x_1-1, f(x_1-1))$

ここで、

$p(x, y)= U_2^1(\boxed{x}, y)=x$

原始帰納的関数の例 (10)

(10)自然数上での減算$x_1 \dot{-} x_2$を

$x_1 \dot{-} x_2 = x_1 - x_2$ ($x_1 \geqq x_2$のとき)

$x_1 \dot{-} x_2 = 0$ ($x_1 < x_2$のとき)

とする。$x_1 \dot{-} x_2$ =n-minus(x_1, x_2)とおくと、

n-minus(x_1, x_2)= $U_1^1(x_1)$ ($x_2=0$のとき)

n-minus(x_1, x_2)=p(x_1, x_2-1, n-minus(x_1, x_2-1))

$g(x_1)$ =pd(n-minus(x_1, x_2-1)) ($x_2>0$のとき)

ここで、 $h(x_1, x_2-1, f(x_1, x_2-1))$

$p(x, y, z)= pd(U_3^3(x, y, \boxed{z}))=pd(z)$

原始帰納的関数の例 (11)

(11) 差の絶対値$| x_1-x_2 |$を

$| x_1-x_2 | = x_1-x_2$ ($x_1 \geqq x_2$のとき)

$| x_1-x_2 | = x_2-x_1$ ($x_1 < x_2$のとき)

とする。

$| x_1-x_2 |$ =abs-minus(x_1, x_2)

=plus(n-minus(x_1, x_2), n-minus (x_2, x_1))

$= x_1 \dot{-} x_2 + x_2 \dot{-} x_1$

原始帰納的関数の例 (12)

(12) xの符号を表す関数

$sg(x_1)=0$ ($x_1=0$のとき)

$sg(x_1)=1$ ($x_1>0$のとき)

とすると、

$sg(x_1)=Z(k)=0$ ($x_1=0$のとき)

$sg(x_1)=S(Z(U_2^1(x_1-1, sd(x_1-1))))$ ($x_1>0$のとき)

原始帰納的関数その他 1

関数$f(x_1, \ldots, x_n, y)$が原始帰納的であれば、有限和も有限積も原始帰納的である。

$$\sum_{y<0} f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$$

$$\sum_{y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y) = f(x_1,\ldots,x_n,0) + \ldots + f(x_1,\ldots,x_n,z-1)$$

$$\prod_{y<0} f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$$

$$\prod_{y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y) = f(x_1,\ldots,x_n,0) + \ldots + f(x_1,\ldots,x_n,z-1)$$

原始帰納的関数その他 2

関数$f(x_1, \ldots, x_n, y)$が原始帰納的であれば、以下も原始帰納的である。

$$\sum_{y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

$$\sum_{u<y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{u<y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

$$\sum_{u\le y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{u\le y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

原始帰納的な集合と述語

特徴関数C_S, C_p

集合$S \in N^n$

$C_S(x_1, \ldots, x_n)=0$ 　($(x_1, \ldots, x_n) \in S$のとき)

$C_S(x_1, \ldots, x_n)=1$ 　($(x_1, \ldots, x_n) \notin S$のとき)

が原始帰納的であるとき、Sは原始帰納的集合。

述語$P(x_1, \ldots, x_n)$

$C_p(x_1, \ldots, x_n)=0$ 　($P(x_1, \ldots, x_n)$のとき)

$C_p(x_1, \ldots, x_n)=1$ 　($\neg P(x_1, \ldots, x_n)$のとき)

が原始帰納的であるとき、Pは原始帰納的述語。

原始帰納的述語と関数の例 1

(13) 述語$x=y$
(14) 述語$x<y$
(15) 述語$x \leqq y$
(16) 関数$\max(x, y)$
(17) 関数$\min(x, y)$
(18) 関数$\max(x_1, \ldots, x_n)$
(19) 述語$x|y$ (xはyを割り切る)
(20) 述語$P_r(x)$ (xは素数である)

原始帰納的述語と関数の例 2

(21) **述語**x/y (x**を**y**で割ったときの商**)

(22) **第**$n+1$**番目の素数を表す関数**p_n

(23) **関数**

$l(a)=a$**の素因数分解における**0**でない数の個数** ($a\neq 0$**のとき**)

$l(a)=0$ ($a=0$**のとき**)

(24) a**と**i**の関数**

$(a)_i=a$**の素因数分解における**p_i**のべき数** ($a\neq 0$**のとき**)

$(a)_i=0$ ($a=0$**のとき**)

原始帰納的述語と関数の例 3

(25) **関数**

$$x \circ y = x \bullet \prod_{i<l(y)} p_{l(x)+i}^{\ (y)_i}$$

原始帰納的集合の性質

集合$S, R \in N^n$**が原始帰納的であれば、**

$\overline{S}=N^n-S$

$S \cup R$

$S \cap R$

も原始帰納的。

原始帰納的述語の性質 1

$P(x_1, \ldots, x_r)$**を原始帰納的述語とし、**

$h_1, \ldots, h_r$**を**n**変数の原始帰納的関数とする。**

このとき述語

$P(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_1, \ldots, x_n))$

は原始帰納的。

原始帰納的述語の性質 2

$g_1, \ldots, g_{m+1}$をn変数の原始帰納的関数とし、
$P_1, \ldots, P_m$をn変数の原始帰納的述語で、
各$(x_1, \ldots, x_n)$に対して高々1個の$P_i(x_1, \ldots, x_n)$が真になるものとする。

このとき関数

$f(x_1, \ldots, x_n)=g_1(x_1, \ldots, x_n)$ $(P_1(x_1, \ldots, x_n)$のとき$)$

…

$f(x_1, \ldots, x_n)=g_m(x_1, \ldots, x_n)$ $(P_m(x_1, \ldots, x_n)$のとき$)$

$f(x_1, \ldots, x_n)=g_{m+1}(x_1, \ldots, x_n)$ (それ以外のとき)

は原始帰納的。→証明

原始帰納的述語の性質 3

$P(x_1, \ldots, x_n)$, $Q(x_1, \ldots, x_n)$を原始帰納的述語とすれば、述語

$\neg P(x_1, \ldots, x_n)$

$P(x_1, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, \ldots, x_n)$

$P(x_1, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, \ldots, x_n)$

$P(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n)$

$P(x_1, \ldots, x_n) \leftarrow Q(x_1, \ldots, x_n)$

は原始帰納的。→証明

原始帰納的述語の性質 4

$P(x_1, \ldots, x_n, y)$を原始帰納的述語とすれば、述語

$(\exists y)_{<z} P(x_1, \ldots, x_n, y)$

$\Leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n, 0) \vee \ldots \vee P(x_1, \ldots, x_n, z-1)$

$(\forall y)_{<z} P(x_1, \ldots, x_n, y)$

$\Leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n, 0) \wedge \ldots \wedge P(x_1, \ldots, x_n, z-1)$

は原始帰納的。→証明

最後に

- レポートを配布します
- ミニテストを提出してから帰ること
- 次回は、
  - 帰納的関数3
  - 小レポート回収