

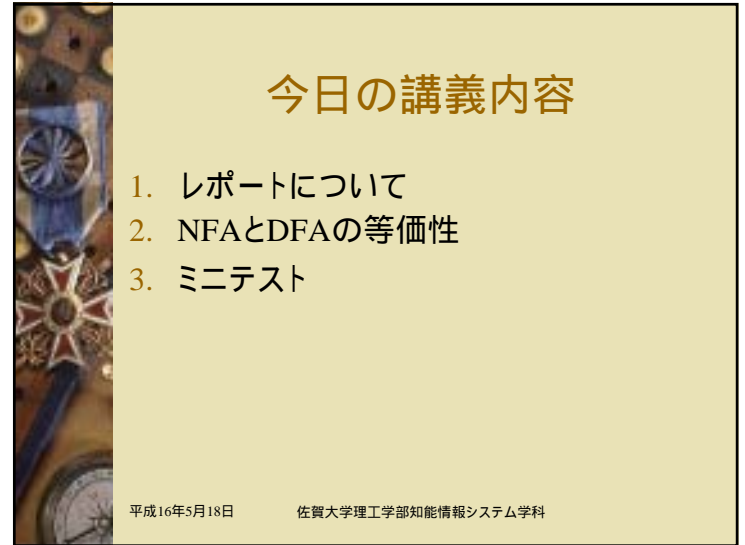


# 計算の理論 I

## NFAとDFAの等価性

火曜3校時  
大月 美佳

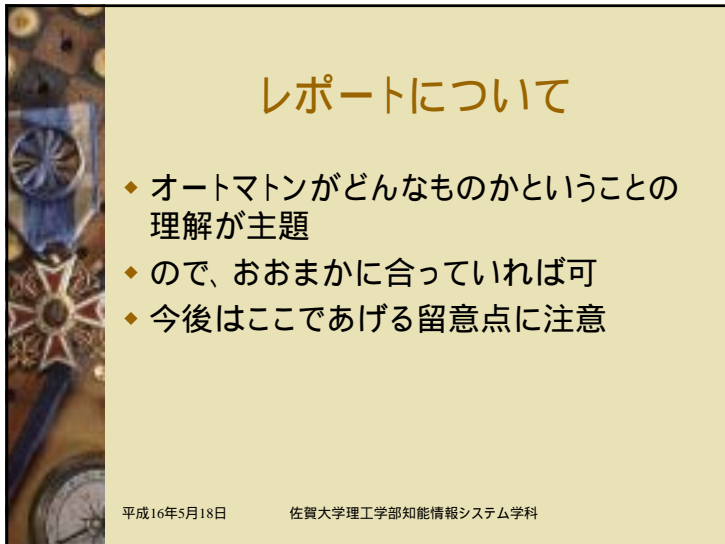
平成16年5月18日 佐賀大学理工学部情報システム学科



## 今日の講義内容

1. レポートについて
2. NFAとDFAの等価性
3. ミニテスト

平成16年5月18日 佐賀大学理工学部情報システム学科



## レポートについて

- ◆ オートマトンがどんなものかということの理解が主題
- ◆ ので、おおまかに合っていれば可
- ◆ 今後はここであげる留意点に注意

平成16年5月18日 佐賀大学理工学部情報システム学科



## 状態遷移図の留意点

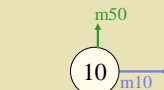
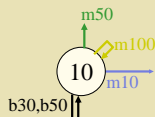
- ◆ 自己への遷移(DFA)か遷移なし(NFA)か
  - 100円を超える投入  
例: 70円の状態で50円追加
  - 代金オーバー  
例: 10円の状態で30円の商品を要求
- ◆ 最終状態を何にすべきか
  - オートマトンの機能を決めるのは人間
  - 解は一つではない
  - 自動販売機としては中途半端(押し売り?!)

平成16年5月18日 佐賀大学理工学部情報システム学科

## 定義式に関する留意点

### ◆ 遷移関数の書き方

- 自己への遷移(DFA)か遷移無し(NFA)か



仕様には合っていない?  
(dead state)

	m10	m50	m100	b30	b50
10	20	60	10	10	10

	m10	m50	m100	b30	b50
10	{20}	{60}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 定義式の解答例

### ◆ 状態の集合 Q

= { 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 }

### ◆ 入力アルファベット

= { m10, m50, m100, b30, b50 }

### ◆ 初期状態 $q_0$

= 0

### ◆ 最終状態の集合 F

= { 0 } \*これに限らない

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 定義式の解答例 つづき

### ◆ 遷移関数

(DFAの場合)

自己への遷移

- 100を超える投入
- 代金オーバー

	m10	m50	m100	b30	b50
0	10	50	100	0	0
10	20	60	10	10	10
20	30	70	20	20	20
30	40	80	30	0	30
40	50	90	40	10	40
50	60	100	50	20	0
60	70	60	60	30	10
70	80	70	70	40	20
80	90	80	80	50	30
90	100	90	90	60	40
100	100	100	100	70	50

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## このDFAが受理する記号列

### ◆ 最終状態の集合を何にしたかに依存

- その最終状態のどれかに到達する記号列
- 上の例では 0 一つが最終状態

1. m10, m10, m10, b30

2. m50, b50

など

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 今日の新しいこと

### ◆ NFAとDFAの等価性

- なぜ等価性を言わなければならないか？  
NFA(人間が考えやすいもの)を  
DFA(コンピュータが処理しやすいもの)へ  
変換するため
- 教科書 2.3.5 p.66 – p. 75
- サブセット構成法
  - 複雑なものと同様なものの2つ

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## 等価性

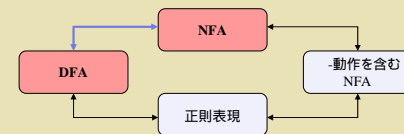
等価(equivalent)である

= 受理集合が同じ

受理集合 = 受理言語 = 正則集合

DFAとNFAは実は等価

ホント？



平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## DFAとNFAの等価性

### ◆ DFAとNFAが等価

1. DFAで受理できる集合はすべて何らかのNFAで受理できる  
DFAは特殊なNFA (簡単)
2. NFAで受理できる集合はすべて何らかのDFAで受理できる  
NFAがDFAで模倣できることを示さなくてはいけない(難しい!!)

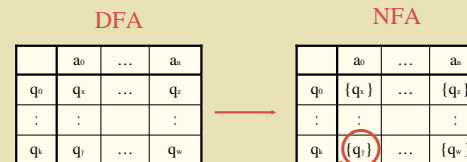
平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## DFAとNFAの等価性 1

DFAはNFAとして書くことができる

(遷移関数だけの違い) 定理 2.12(p. 71)



要素数1の集合

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## DFAとNFAの等価性 2

- ◆ NFAをDFAで模倣する

【定理】

Lを非決定性有限オートマトンで受理される集合とする。そのとき、Lを受理する決定性の有限オートマトンが存在する。

NFAを模倣するDFAは、「サブセット構成法」で作成できる。 定理 2.11 (p. 70)

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## サブセット構成法(1)

- ◆  $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$   
= 言語Lを受理するNFA
- ◆  $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$   
M'での一つの状態 = Mの状態の部分集合  
 $Q' = 2^Q$  (Qのベキ集合)

	$a_i$
$\{q_1, \dots, q_i\}$	$\{q_1, \dots, q_i\}$

一つの入力に対して  
Mが取り得る状態の集合

$q' = M'$ での一つの状態  
「 $\{q_1, \dots, q_i\}$ 」と表記  $q'_0 = \{q_0\}$

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## サブセット構成法(2)

- ◆  $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$  の  $F'$   
Q'のうちMの最終状態を1個以上含むもの

	$a_0$		$a_0$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_0\}$	...	$\{q_0\}$
⋮	⋮		⋮
$\{q_i\}$	$\{q_i\}$	...	$\{q_0, q_0, q_i\}$
⋮	⋮		⋮
$\{q_0, q_i\}$	$\{q_0, q_0, q_i\}$	...	$\{q_0, q_i\}$

例:  $F = \{q_{01}, q_{02}\}$

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## サブセット構成法(3)

- ◆  $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$  の  $\delta'$   
 $\delta(\{q_1, q_2, \dots, q_i\}, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_j\}$   
のとき、かつそのときに限り、  
 $\delta'([q_1, q_2, \dots, q_i], a) = [p_1, p_2, \dots, p_j]$   
とおく。すなわち、  
Q'の元 $[q_1, q_2, \dots, q_i]$ に $\delta'$ を適用した結果 $\delta'([q_1, q_2, \dots, q_i], a)$ は、  
Qの元 $q_1, q_2, \dots, q_i$ にそれぞれ $\delta$ を適用した結果  
 $\delta(q_1, a), \delta(q_2, a), \dots, \delta(q_i, a)$ の和集合。

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知情報システム学科

## NFAと等価なDFAの例

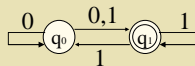
- 教科書の例(例 2.10 p.67)とは別

NFA:  $M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$

とする。なお遷移関数 $\delta$ は、

$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}, \delta(q_0, 1) = \{q_1\}$

$\delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\}, \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}$



平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## L(M)を受理するDFA

DFA:  $M' = (Q, \{0,1\}, \delta', [q_0], F)$

$Q = \{[q_0], [q_1], [q_0, q_1], [\ ]\} = 2^{\{q_0, q_1\}}$

$\delta'([q_0], 0) = [q_0, q_1], \delta'([q_0], 1) = [q_1]$

$\delta'([q_1], 0) = [\ ], \delta'([q_1], 1) = [q_0, q_1]$

$\delta'([q_0, q_1], 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = [q_0, q_1]$

$\delta'([q_0, q_1], 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = [q_0, q_1]$

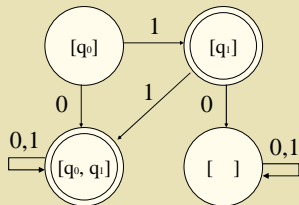
$\delta'([\ ], 0) = \delta'([\ ], 1) = [\ ]$

$F = \{[q_1], [q_0, q_1]\}$

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## M'の遷移図



Mで受理する記号列をM'で受理できるか?

(試してみよう)

0, 1, 01, 010

× 10, 100, 101

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## NFAと等価なDFAの一般形(1)

NFA:  $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

DFA:  $M'(Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$

	$a_0$	...	$a_n$
$q_0$	$P_{00}$	...	$P_{0n}$
...	...	...	...
$q_i$	$P_{i0}$	...	$P_{in}$

$P_{ij}$ : 状態 $q_i$ のとき入力 $a_j$ に対して遷移しうる状態の集合(Qの部分集合)

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

	$a_0$	...	$a_n$
$[q_0]$	$[P_{00}]$	...	$[P_{0n}]$
...	...	...	...
$[q_i]$	$[P_{i0}]$	...	$[P_{in}]$
...	...	...	...
$[q_0, q_i]$	$[P_{00}, P_{i0}]$	...	$[P_{0n}, P_{in}]$
...	...	...	...
$[q_0, \dots, q_i]$	$[P_{00}, \dots, P_{i0}]$	...	$[P_{0n}, \dots, P_{in}]$

## NFAと等価なDFAの一般形(2)

NFA:  $M$  DFAの $F'$ の求め方

$$F = \{q_k\}$$

$$F' = \{[q_k], [q_0, q_k], \dots, [q_0, \dots, q_k, \dots, q_n]\}$$

$$F = \{q_j, q_k\}$$

$$F' = \{[q_j], [q_k], \dots, [q_0, \dots, q_j, \dots, q_k, \dots, q_n]\}$$

$Q'$ の中で $F$ のどれかの要素を含むもの

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 例題

NFA:  $M(\{p, q, r, s\}, \{0, 1\}, p, \{s\})$   
と等価なDFAを求めよ。なお、遷移関数は下表。

	0	1
p	p, q	p
q	r	r
r	s	-
s	s	s

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## $Q'$ と $F'$ の求め方 (総当り)

NFA:  $M(\{p, q, r, s\}, \{0, 1\}, p, \{s\})$

DFA:  $M'(Q', \Sigma, q'_0, F')$

$Q' = Q$ のべき集合(部分集合の集合)

$Q' = \{ \emptyset, [p], [q], [r], [s], [p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] \}$

$\emptyset$ : 1個  
 $[p], [q], [r], [s]$ :  ${}^4C_1$ 個  
 $[p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s]$ :  ${}^4C_2$ 個  
 $[p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s]$ :  ${}^4C_3$ 個  
 $[p, q, r, s]$ :  ${}^4C_4$ 個

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## $F'$ の求め方 (総当り)

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
p	[p, q]	[p]
q	[r]	[r]
r	[s]	-
s	s	s
[p]	[p, q]	[p]
[q]	[r]	[r]
[r]	[s]	-
[s]	s	s
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p, s]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r]	[r, s]	[r]
[q, s]	[r, s]	[r, s]
[r, s]	[s]	[s]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[q, r, s]	[r, s]	[r, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

平成16年5月18日

佐賀大学理

## きちんと書くと (総当り)

$$Q' = \{ [ ], [p], [q], [r], [s], [p, q], [p, r], [p, s], [q, r], [q, s], [r, s], [p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] \}$$

$$= \{0, 1\}$$

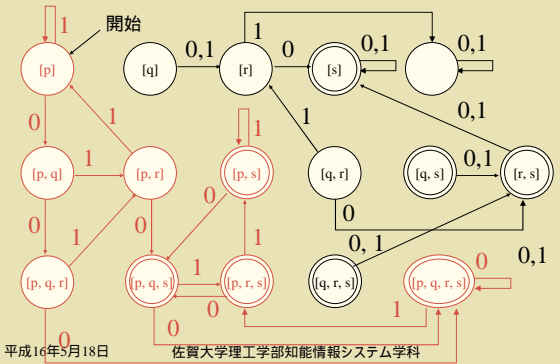
$$q'_0 = [p]$$

$$F' = \{ [s], [p, s], [q, s], [r, s], [p, q, s], [p, r, s], [q, r, s], [p, q, r, s] \}$$

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 総当りでは無駄が多い $q'_0([p])$ からの道がない状態を含む



## とQ'とF'を求める (p. 68 - 69 必要なもののみ)

	0	1
開始 → [p]	[p, q]	[p]
[p, q]	[p, q, r]	[p, r]
[p, r]	[p, q, s]	[p]
[p, q, r]	[p, q, r, s]	[p, r]
[p, q, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]
[p, r, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, s]	[p, q, s]	[p, s]
[p, q, r, s]	[p, q, r, s]	[p, r, s]

$F'$  (green circle around [p, q, s], [p, r, s], [p, s])

$Q'$  (red circle around [p, q, s], [p, r, s], [p, s], [p, q, r, s])

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## きちんと書くと (p. 68 - 69 必要なもののみ)

$$Q' = \{ [p], [p, q], [p, r], [p, s], [p, q, r], [p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] \}$$

$$= \{0, 1\}$$

$$q'_0 = [p]$$

$$F' = \{ [p, s], [p, q, s], [p, r, s], [p, q, r, s] \}$$

平成16年5月18日

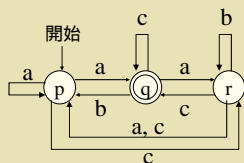
佐賀大学理工学部知能情報システム学科



## 補題

NFA:  $M(\{p, q, r\}, \{a, b, c\}, p, \{q\})$   
と等価なDFAを求める。

	a	b	c
p	p, q	-	r
q	r	p	q
r	p	r	p, q

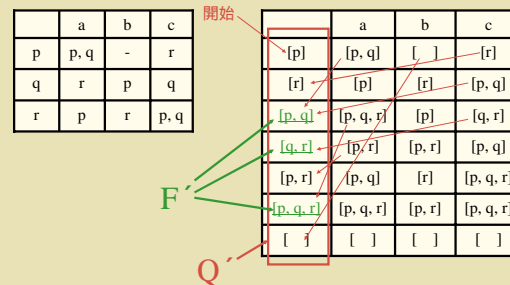


平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 'とQ'とF'を求める

(補題: 必要なもののみ)



平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## きちんと書くと

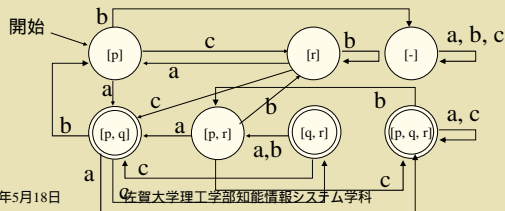
(補題: 必要なもののみ)

$Q' = \{[-], [p], [r], [p, r], [p, q], [q, r], [p, q, r]\}$

$= \{a, b, c\}$

$q'_0 = [p]$

$F' = \{[p, q], [q, r], [p, q, r]\}$



平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

## 最後に

- ◆ ミニテスト
  - 教科書・資料を見ても話し合っても良い
  - 状態は必要なものだけにしておこう
- ◆ ミニテストを提出して帰ること

次回: -動作を含む有限オートマトン  
教科書 2.5 (p. 80 -)

平成16年5月18日

佐賀大学理工学部知能情報システム学科