計算の理論 I
プッシュダウンオートマトン

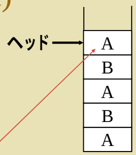
月曜3校時
大月 美佳

今日の講義内容

1. プッシュダウンオートマトン(PDA)
   – 定義
   – 計算（クラスCFL）
   – 構文木と最左導出
- ミニテスト

プッシュダウンオートマトン
(pushdown automaton)

PDA=FA+プッシュダウンストア

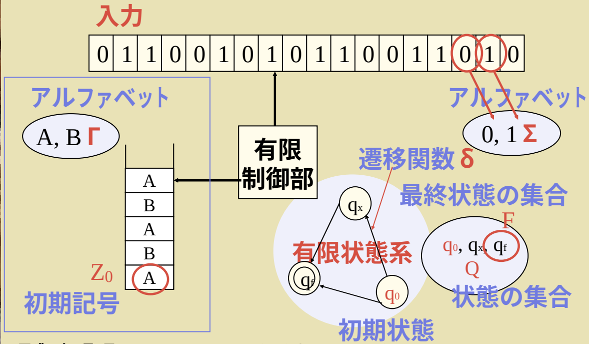


- プッシュダウンストア（スタック）
  – 記号列を記憶している
  – プッシュダウンヘッドが一番上の記号を指す
  – 一番上の記号（トップ記号）のみ読める
  – 2つの操作
    - プッシュ(push): 新たな記号列を積む
    - ポップ(pop): トップ記号を取り除く

PDAの定義

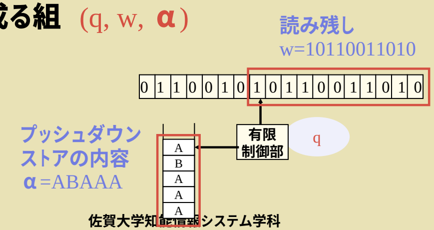
- プッシュダウンオートマトン
  (pushdown automaton (pda))
  M=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, Z_0, F)
  - Q: 状態の有限集合。
  - Σ:入力アルファベット。
  - Γ: プッシュダウンストアのアルファベット
  - δ: 遷移関係＝遷移の集合
    - Q×(Σ∪{ε})×Γ×Q×Γ*の有限部分集合。
    - (q, a, Z, p, α)∈δのとき、(p, α)∈δ(q, a, Z)と書く。
  - q_0: 初期状態、q_0∈Q
  - Z_0: 初期記号、Z_0∈Γ
  - F: 最終状態の集合、F⊆Q

PDAの模式図



時点表示
(instantaneous description)

- **時点表示とは、**
  PDA M=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, Z_0, F)**に対して、**
  状態q∈Q, **入力**w∈Σ*, **記号列**α∈Γ*
  から成る組 (q, w, α)



$\vdash_M$

- $\vdash_M$ **の定義**
  Q×Σ*×Γ***から**Q×Σ*×Γ***への関係**

  $$(q, ax, Z\alpha) \vdash_M (p, x, \beta\alpha)$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$$

  p, q∈Q, a∈Σ∪{ε}, Z∈Γ, α, β∈Γ*

読み方：
遷移(p, β)∈δ(q, a, Z)**によって、**
計算状態(q, ax, Zα) **から**(p, x, βα)**に動作する。**

ε動作
(ε-move)

- **遷移**(p, β)∈δ(q, a, Z)**において、**a=ε **のとき、入力記号を読み込まずに動作すること。**

  $$(q, x, Z\alpha) \vdash_M (p, x, \beta\alpha)$$

  - Z**がポップされ、**β**がプッシュされる。**
  - **プッシュダウンストアが空のときは動作は起こらない。**

PDAの例

PDA

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta,$
$q_0, Z_0, F)$

$Q=\{q_0, q_1, q_2\}$,
$\Sigma=\{0, 1\}$,
$\Gamma=\{Z_0, 0, 1\}$,
$F=\{q_2\}$

δを右表とする。

q	a	Z	δ(q, a, Z)
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	ε	Z_0	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

例の動作

$(q_0, 0100101, Z_0) \vdash_M (q_0, 100101, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_0, 00101, 10Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 0101, 010Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 101, 10Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 01, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 1, Z_0)$
$\vdash_M (q_2, 1, \varepsilon)$

q	a	Z	δ(q, a, Z)
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	ε	Z_0	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

$\vdash^*_M$、$\vdash^t_M$

- $\vdash^*_M$
  $= \vdash_M$ **の反射的かつ推移的閉包**
- $\vdash^t_M$
  $=(p_0, w_0, \alpha_0) \vdash_M (p_1, w_1, \alpha_1) \vdash_M \dots \vdash_M (p_t, w_t, \alpha_t)$
  t: **計算のステップ数**
- **省略形**
  $\vdash^*$、$\vdash^t$

2種類の受理

1. **最終状態によって受理**
   入力wに対して、$q \in F$と$\gamma \in \Gamma^*$が存在して
   $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \gamma)$
   L(M): **最終状態によって受理される記号列の集合**

– **最終状態と空ストアによって受理**
   入力wに対して、$q \in F$が存在して
   $(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q, \varepsilon, \varepsilon)$
   N(M): **最終状態と空ストアによって受理される記号列の集合**

受理の例

$(q_0, 0110, Z_0) \vdash_M (q_0, 110, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 10, 10Z_0)$
$\vdash_M (q_1, 0, 0Z_0)$
$\vdash_M (q_1, \varepsilon, Z_0)$
$\vdash_M (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

q	a	Z	$\delta(q, a, Z)$
q_0	0	Z_0	$\{(q_0, 0Z_0), (q_1, 0Z_0)\}$
q_0	1	Z_0	$\{(q_0, 1Z_0), (q_1, 1Z_0)\}$
q_0	0	0	$\{(q_0, 00), (q_1, 00)\}$
q_0	0	1	$\{(q_0, 01), (q_1, 01)\}$
q_0	1	0	$\{(q_0, 10), (q_1, 10)\}$
q_0	1	1	$\{(q_0, 11), (q_1, 11)\}$
q_1	0	0	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	1	1	$\{(q_1, \varepsilon)\}$
q_1	ε	Z_0	$\{(q_2, \varepsilon)\}$

$0110 \in L(M)$かつ$0110 \in N(M)$
$L(M)=N(M)=\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
w^Rはwの反転

2つの受理は同値

言語$L \subseteq \Sigma^*$に対して、次の(1)(2)は同値

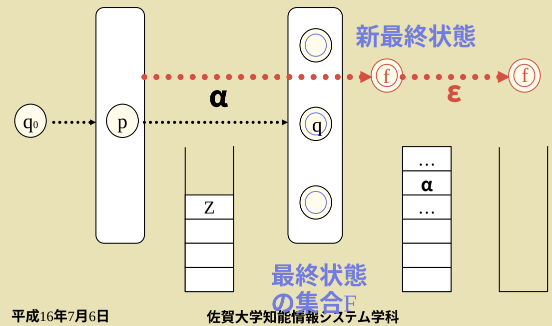
(1) あるPDA Mに対して$L=L(M)$となる。
(2) あるPDA Mに対して$L=N(M)$となる。

証明ステップ a
L(M)なMから変換

$L=L(M)$な$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
から、$M'=(Q \cup \{f\}, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0, \{f\})$
を作る。δ'はδに次の遷移を加えたもの。

(i) $(q, \alpha) \in \delta(p, a, Z)$かつ$q \in F$のとき、$(f, \alpha) \in \delta'(p, a, Z)$
(ii) すべての$Z \in \Gamma$に対して$(f, \varepsilon) \in \delta'(f, \varepsilon, Z)$

変換の意味 a



証明ステップ b
N(M´)なM´から変換

L=N(M´)なM=$(Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', Z_0', F')$
から、M=$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S, F)$
を作る。

$Q=Q' \cup \{q_0, f\}$ （ただし$q_0, f \notin Q$）

$\Gamma = \Gamma' \cup \{S\}$ （ただし$S \notin \Gamma'$）

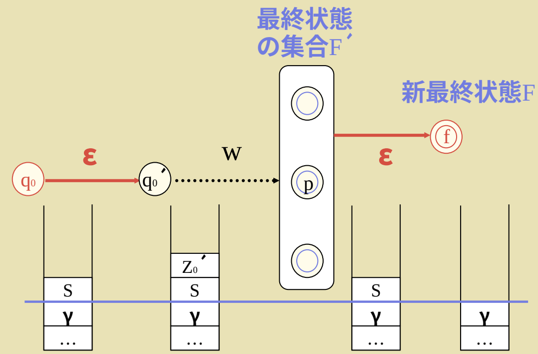
$F=\{f\}$

δはδ´に次の遷移を加えたもの。

(i) $\delta(q_0, \varepsilon, S)=\{(q_0', Z_0'S)\}$

(ii) $\delta(p, \varepsilon, S)=\{(f, \varepsilon)\}$ ただし$p \in F'$

変換の意味 b



ミニテストと次回内容

- ミニテスト
  教科書・資料を見ても、友達と相談しても良い
- ミニテストを提出すること
  出したら帰って良し
- 次回(7/13)内容
  反復補題（たぶん）
  レポート回収