



計算の理論 I

反復補題

火曜3校時
大月 美佳

平成16年7月13日 佐賀大学知能情報システム学科 1



今日の講義内容

- ◆ 反復補題
 - 正則表現でないことの示し方
 - 例

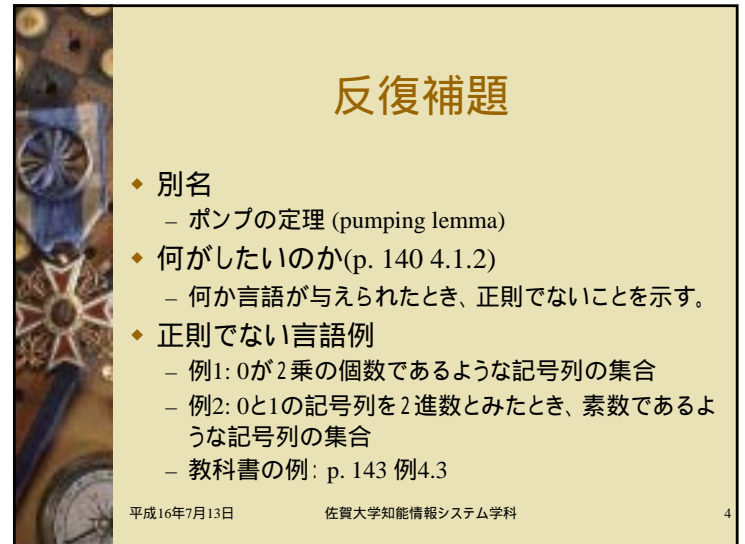
平成16年7月13日 佐賀大学知能情報システム学科 2



連絡事項

- ◆ レポート回収
 - 講義終了時に回収
 - 配点: 100点中40点
- ◆ 今後の予定
 - 20日(火)
 - 試験について
- ◆ 試験日は27日(火) 農学部大講義室

平成16年7月13日 佐賀大学知能情報システム学科 3



反復補題

- ◆ 別名
 - ポンプの定理 (pumping lemma)
- ◆ 何がしたいのか(p. 140 4.1.2)
 - 何か言語が与えられたとき、正則でないことを示す。
- ◆ 正則でない言語例
 - 例1: 0が2乗の個数であるような記号列の集合
 - 例2: 0と1の記号列を2進数とみたとき、素数であるような記号列の集合
 - 教科書の例: p. 143 例4.3

平成16年7月13日 佐賀大学知能情報システム学科 4

正則言語に対する反復補題

(p.140 定理4.1)

- 正則集合Lに対して次の条件を満たす定数nが存在する。

wがLに属する語で $|w| \geq n$ ならば、適当な語x, y, zを選んで、

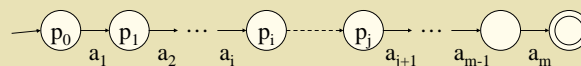
$$w = xyz, |xy| \leq n, |y| \geq 1, xy^kz \in L (k \geq 0)$$

を満たすようにすることができる。このnは、Lを受理する最小の(すなわち状態数が最も少ない)FAの状態数を超えない。

証明-1

$w = a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m$ を受理するDFA A

DFAなので経路はひとつ



- DFA Aがn個の状態を持ち

- $m > n$ である

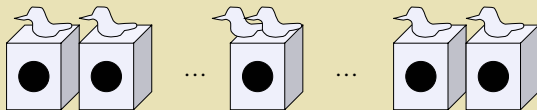
ならば、 $p_i = p_j$ なi, jを選ぶことができる。

(鳩の巣原理)

鳩の巣原理？

n個の巣箱にn+1羽の鳩

どこかひとつの巣箱には2羽の鳩が...



証明-2

wを以下のように分割が可能

(1) $x = a_1 a_2 \dots a_i$

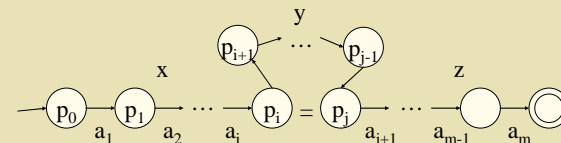
i=0はあり得る

(2) $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$

i=jはあり得ない

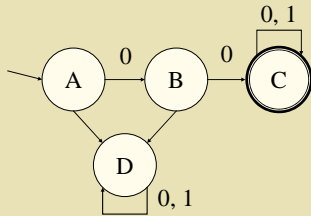
(3) $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$

j=mはあり得る



例

$00(0+1)^*$
最小のDFA $n=4$



0010110110を分解
 $x=00, y=10, z=110110$
 $xz=00110110$
 $xyz=0010110110$
 $xyyz=001010110110$

平成16年7月13日

佐賀大学知能情報システム学科

9

正則でないことの示し方 (p. 142 背理法)

1. 正則でないことを示す対象言語: L
2. (敵) L に対して補題の性質をもつ数 n を仮定する。仮定後変更してはならない。
3. (自) L の元 w をひとつ決める ($|w| = n$)。
4. (敵) w を、 $|xy| = n$ かつ $|y| = 1$ であるような x, y, z に分解する
5. (自) $xy^k z$ が L に入らないような k を指摘する。どのような n に対してもこれを示す。

平成16年7月13日

佐賀大学知能情報システム学科

10

例1

Step 1 調べたい言語 L

- ◆ 0の列で、長さが完全平方数であるものの全体

$$L = \{0^{i^2} \mid i \text{は1以上の整数}\}$$

- ◆ 0, 0000, 0000000000, 000000000000000000,

...

1の2乗

2の2乗

3の2乗

4の2乗

平成16年7月13日

佐賀大学知能情報システム学科

11

Step 2 ~ 4

- ◆ 補題の性質をもつ n を仮定
 $w = 0^{n^2}$ とおく
- ◆ w を $|xy| = n$ かつ $|y| = 1$ であるような x, y, z に分解したとする。この w は以下を満たす。

$$w = xyz$$

$$1 \leq |y| \leq n \quad (∵ |xy| \leq n)$$

$$xy^k z \in L \quad (k \geq 0)$$

平成16年7月13日

佐賀大学知能情報システム学科

12

Step 5

- ◆ $k=2$ のとき、
 $n^2 < n^2 + 1 \leq |xy^2z| \leq n^2 + n < (n+1)^2$
- ◆ これは完全平方数ではなく、 L に含まれない。これは矛盾。
- ◆ よって L は正則ではない。

例2 教科書p.141 例4.2

- Step.1 調べたい言語 L
同じ個数の0と1を含む記号列
- Step.2 補題の性質を持つ n を仮定
- Step.3 L の元 w として、 $0^n 1^n$ を選ぶ
- Step.4 $0^n 1^n$ を補題の x, y, z に分解する
- Step.5 y を除いて矛盾を導く
 $|xy|$ n より、 x と y は0から成る。
 $|y|$ 1より、 xz の0は n より少なくなる。
一方補題より、 xz は L に属する。
 z は n 個の1を含んでいるはずなので、矛盾。

レポート回収と次回内容

- ◆ レポート回収
出席チェックを兼ねる
(忘れた人は申し出よ)
出したら帰ってよし
- ◆ 次回(7/20)内容
試験について