計算の理論 I 出席チェック兼用ミニテスト用紙 2004 年 4 月 13 日	学籍番号	
	名　前	

問題

帰納法で次の式を証明せよ

a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$　　　b) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$

a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(1) n=0 のとき、(与式の左辺)=0、(与式の右辺)= $\frac{0(0+1)}{2}$ =0 で成り立つ。

(2) n=k-1(k ＞ 0)のとき、与式が成り立つと仮定する。つまり、$\sum_{i=0}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}$ が成り立っているとする。このとき、

$$\sum_{i=0}^{k} i = \sum_{i=0}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)k}{2} + k = \frac{(k-1)k+2k}{2} = \frac{(k-1+2)k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

となり、n=k のときも与式が成り立つ。

∴ (1), (2)より、n≧0 について与式は成り立つ。

b) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$ n=0 のとき、(与式の左辺)=0、(与式の右辺)= $(0)^2$ =0 で成り立つ。

(2) n=k-1(k ＞ 0)のとき、与式が成り立つと仮定する。つまり、$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2$ が成り立っているとする。このとき、

(与式の左辺)= $\sum_{i=0}^{k} i^3 = \sum_{i=0}^{k-1} i^3 + k^3 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + k^3$

(与式の右辺)= $(\sum_{i=0}^{k} i)^2 = (\sum_{i=0}^{k-1} i + k)^2 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + 2k\sum_{i=0}^{k-1} i + k^2$

ここで、a)より、$(\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + 2k\sum_{i=0}^{k-1} i + k^2 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + 2k\frac{(k-1)k}{2} + k^2$

$$(\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + 2k\frac{(k-1)k}{2} + k^2 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + k^2(k-1) + k^2 = (\sum_{i=0}^{k-1} i)^2 + k^3$$

となり、(与式の左辺)= (与式の右辺)が成り立つ。

∴(1)と(2)より、n≧0 について与式は成り立つ。