計算の理論 II

帰納的関数

月曜5校時

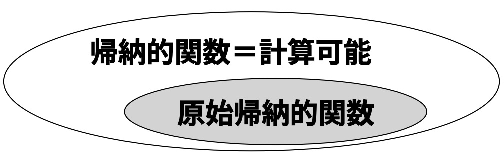
大月美佳

今日の講義内容

1. **原始帰納的関数**
   1. **初期関数**
   2. **合成と原始帰納**
2. 原始帰納的でない関数
   1. Ackermann関数

原始帰納的関数

- 計算可能な関数の一部
- 原始帰納的関数
  を拡大→帰納的関数＝計算できる関数の族
  帰納的関数＝Turing機械で受理できる言語



数論的関数

- 自然数 (非負整数) N
  N={0, 1, 2, 3, …}
- 数論的関数(関数)
  N個の自然数の組に対して、
  高々1個の自然数を対応づける関数
  f: $N^n \rightarrow N$

初期関数

原始帰納的関数の素。

(1) $Z(x)=0$

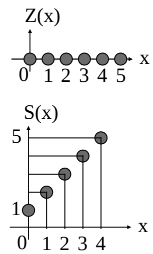
どんなxも0にしてしまう。

(2) $S(x)=x+1$

xに1を加える。

(3) $U_n^i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)=x_i$

i番目のx_iを取り出す。



これらに操作を加え原始帰納的関数を作成

合成と原始帰納

初期関数に加える操作

(I) **合成**

r変数の関数hとr個のn変数関数$g_i(1 \leqq i \leqq r)$から、
n変数の関数fを以下の操作で作ること。

$f(x_1, \ldots, x_n)=h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n))$

(II) **原始帰納** (primitive recursion)

n-1変数の関数gとn+1変数の関数hから、
n変数の関数fを以下の操作で作ること。

$f(x_1, \ldots, x_n)=g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ($x_n=0$のとき)

$f(x_1, \ldots, x_n)=h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n-1, f(x_1, \ldots, x_n-1))$ ($x_n>0$のとき)

原始帰納?

$f(x_1, \ldots, x_n)$

$=h(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n-1}, f(x_1, \ldots, \underline{x_n-1}))$

$=h(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n-2}, f(x_1, \ldots, \underline{x_n-2})))$

…

$=h(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1}, \underline{x_n-2}, h(\ldots \underline{g(x_1, \ldots, x_{n-1})} \ldots)))$

0

x_n-3 …

x_n-2

x_n-1

原始帰納的関数
(primitive recursive)

定義

初期関数(1), (2), (3)**に**
操作(I), (II)**を**
有限回(0**回以上**)**適用して**
得られた関数。

原始帰納的関数の例 (4)

(4) **定数関数** $C_n^k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)=k$

なぜならば

$C_n^k(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

$=\boxed{S(S(\ldots S(}Z(U_n^i(x_1, \ldots, x_n)))\ldots))=k$

0にk回1を加算

xを1個取り出す (どれでも良い)

選ばれたxを0にする

$C_5^3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=S(S(S(Z(U_5^4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))))$

$=S(S(S(Z(x_4))))=S(S(S(0)))=S(S(1))=S(2)=3$

原始帰納的関数の例 (5)

(5) x_1+x_2

plus$(x_1, x_2)= x_1+x_2$**とおくと、**

plus$(x_1, x_2)= U_1^1(x_1)$ ($x_2=0$**のとき**)

plus$(x_1, x_2)=S(U_3^3(x_1, x_2-1, \text{plus}(x_1, x_2-1)))$

(x_2＞0**のとき**)

$\text{plus}(2, 4)=S(U_3^3(2, 3, \text{plus}(2, 3)))=S(\text{plus}(2, 3))$

$=S(S(U_3^3(2, 2, \text{plus}(2, 2))))=S(S(\text{plus}(2, 2)))$

$=S(S(S(U_3^3(2, 1, \text{plus}(2, 1)))))=S(S(S(\text{plus}(2, 1))))$

帰納的→ $=S(S(S(S(U_3^3(2, 0, \text{plus}(2, 0))))))=S(S(S(S(\text{plus}(2, 0)))))$

$=S(S(S(S(\boxed{U_1^1(2)})))) \; g(x_1)$

$=S(S(S(S(2))))=S(S(S(3)))=S(S(4))=S(5)=6$

原始帰納的関数の例 (6)

(6) $x_1 \cdot x_2$

times$(x_1, x_2)= x_1 \cdot x_2$**とおくと、**

times$(x_1, x_2)=Z(x_1)=0$ ($x_0=0$**のとき**)

times$(x_1, x_2)=p(x_1, x_2-1, \text{times}(x_1, x_2-1))$

(x_2＞0**のとき**)

ここで、

$p(x, y, z)= \text{plus}(U_3^1(\boxed{x}, y, z), U_3^3(x, y, \boxed{z}))$

$=x+z$

(6)´の計算例

$\text{times}(3, 4)=p(3, 3, \text{times}(3, 3))=3+\underline{\text{times}(3, 3)}$

$=3+\underline{p(3, 2, \text{times}(3, 2))}=3+3+\text{times}(3, 2)$

$=3+3+p(3, 1, \text{times}(3, 1))=3+3+3+\text{times}(3, 1)$

$=3+3+3+p(3, 0, \text{times}(3, 0))=3+3+3+3+\text{times}(3, 0)$

$=3+3+3+3+\boxed{Z(3)}=3+3+3+3+0=12$

原始帰納的関数の例 (7)

(7) x^y

power(x_1, x_2)= $x_1^{x_2}$**とおくと、** g(x_1)

power(x_1, x_2)=S(Z(x_1))=1 　(x_2=0**のとき**)

power(x_1, x_2)=p(x_1, x_2-1, power(x_1, x_2-1))

= x_1・power(x_1, x_2-1) (x_2＞0**のとき**)

h(x_1, x_2-1, f(x_1, x_2-1))

ここで、

$p(x, y, z) = times(U_3^1(\boxed{x}, y, z), U_3^3(x, y, \boxed{z}))$

$= x \cdot z$

原始帰納的関数の例 (8)

(8) x_1!

factorial(x_1)= x!**とおくと、** g(k)

factorial(x_1)=S(Z(k))=1 　(x_1=0**のとき**)

factorial(x_1)=p(x_1-1, factorial(x_1-1))

= x_1・factorial(x_1-1) (x_1＞0**のとき**)

ここで、 h(x_1-1, f(x_1-1))

$p(x, y) = times(S(U_2^1(\boxed{x}, y)), U_2^2(x, \boxed{y}))$

$=(x+1) \cdot y$

原始帰納的関数の例 (9)

(9) pd(x_1)**を**

pd(x_1)=0 　(x_1=0**のとき**)

pd(x_1)= x_1-1 　(x_1＞0**のとき**)

とおくと、 g(k)

pd(x_1)=Z(k)=0 (x_1=0**のとき**)

pd(x_1)=p(x_1-1, pd(x_1-1))=x_1-1 (x_1＞0**のとき**)

ここで、 h(x_1-1, f(x_1-1))

$p(x, y) = U_2^1(\boxed{x}, y) = x$

原始帰納的関数の例 (10)

(10)**自然数上での減算**$x_1 \dot{-} x_2$**を**

$x_1 \dot{-} x_2 = x_1 - x_2$ (x_1≧x_2**のとき**)

$x_1 \dot{-} x_2 = 0$ 　(x_1＜x_2**のとき**)

とする。$x_1 \dot{-} x_2$ =n-minus(x_1, x_2)**とおくと、**

n-minus(x_1, x_2)= U_1^1(x_1) (x_2=0**のとき**)

n-minus(x_1, x_2)=p(x_1, x_2-1, n-minus(x_1, x_2-1))

g(x_1) =pd(n-minus(x_1, x_2 -1)) (x_2＞0**のとき**)

ここで、 h(x_1, x_2-1, f(x_1, x_2-1))

$p(x, y, z) = pd(U_3^3(x, y, \boxed{z})) = pd(z)$

原始帰納的関数の例 (11)

(11) **差の絶対値**$|x_1-x_2|$**を**

$|x_1-x_2| = x_1-x_2$ ($x_1 \geqq x_2$**のとき**)

$|x_1-x_2| = x_2-x_1$ ($x_1 < x_2$**のとき**)

とする。

$|x_1-x_2|$ =abs-minus(x_1, x_2)

=plus(n-minus(x_1, x_2), n-minus (x_2, x_1))

$= x_1 \dot{-} x_2 + x_2 \dot{-} x_1$

原始帰納的関数の例 (12)

(12) x**の符号を表す関数**

sg(x_1)=0 (x_1=0**のとき**)

sg(x_1)=1 (x_1>0**のとき**)

とすると、

sg(x_1)=Z(k)=0 (x_1=0**のとき**)

sg(x_1)=S(Z(U_2^1 (x_1-1, sd(x_1-1))) (x_1>0**のとき**)

原始帰納的関数その他 1

関数f(x_1, …, x_n, y)**が原始帰納的であれば、有限和も有限積も原始帰納的である。**

$$\sum_{y<0} f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$$

$$\sum_{y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y) = f(x_1,\ldots,x_n,0) + \ldots + f(x_1,\ldots,x_n,z-1)$$

$$\prod_{y<0} f(x_1,\ldots,x_n,y) = 0$$

$$\prod_{y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y) = f(x_1,\ldots,x_n,0) + \ldots + f(x_1,\ldots,x_n,z-1)$$

原始帰納的関数その他 2

関数f(x_1, … , x_n , y)**が原始帰納的であれば、以下も原始帰納的である。**

$$\sum_{y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

$$\sum_{u<y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{u<y<z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

$$\sum_{u\le y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),\ \prod_{u\le y\le z} f(x_1,\ldots,x_n,y),$$

原始帰納的でない関数

計算可能だが原始帰納的ではない関数

F(x, n)

任意の1変数の原始帰納的関数f(x)に対して
f(x)=F(n, x)
となる自然数が存在するような関数。
→証明

Ackerman関数

原始帰納的でない関数

A(x, y)

1. A(0, y) = y+1
2. A(x+1, 0) = A(x, 1)
3. A(x+1, y+1) = A(x, A(x+1, y))

計算に手間のかかる関数
→例 A(2, 2)

最後に

- レポートを提出してから帰ること
- 次回は、
  - 帰納関数つづき