

計算の理論 II

Turing機械の合成

月曜5校時
大月美佳

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

1

今日の講義

1. 前回のおさらい
 1. 定義など
2. Turing機械の合成
 1. 小さなものを組み上げて複雑なものへ
3. ミニテスト・小レポート回収

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

2

Turing機械の形式的定義

Turing機械 $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q: 状態の有限集合。

Σ : 可能なテープ記号のアルファベット(空白記号Bを含む)

δ : 遷移関係=遷移の集合

$(Q-F) \times \Sigma$ から $\Sigma \times \{L, R, N\} \times Q$ の有限部分集合。

q_0 : 初期状態、 $q_0 \in Q$

F: 最終状態の集合、 $F \subseteq Q$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

3

Turing機械の基本的動作

状態pで入力aを読んだとき、

- (1) ヘッドのある場所をbに書き換える。
- (2) 方向mに移動する。(m=L|R|N)
- (3) 次の状態qに遷移する。

→遷移関数: $\delta(p, a)=(b, m, q)$

→5つ組: pabmq

遷移関数の代わりに書くことができる

Turing機械 $M=(Q, \Sigma, K, q_0, F)$

$K=\{pabmq \mid \delta(p, a)=(b, m, q)\}$

2004/11/15

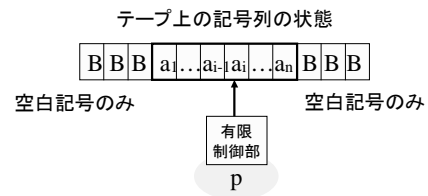
佐賀大学理工学部知能情報システム学科

4

計算状況

$a_1 \dots a_{i-1} p a_i \dots a_n$

Turing機械 Mが以下のような状態なとき



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

5

計算

(computation)

α_0 に始まり α_r に終わる M による計算

Turing機械 M

計算状態の列 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$

各 $i (0 \leq i < r)$ に対して $\alpha_i \vdash_M \alpha_{i+1}$ であり、

$\alpha_r = u q_h v$ ($u, v \in \Sigma^*, q_h \in F$)

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

6

数の符号化

数値計算

数や数の組を符号化する必要がある

符号化の例

$\Sigma \ni 1$ とする

数 x に対して、

$$\bar{x} = 11 \dots 1 = 1^{x+1}$$

n 個の数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) に対して、

$$\overline{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_n$$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

7

関数 f を計算する Turing 機械

◆ Turing機械 $M = (Q, \Sigma, K, q_0, F)$

が任意の x_1, \dots, x_n に対して、

$$\overline{(x_1, \dots, x_n)} q_0 B \vdash_M^* \overline{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))} q_h B$$

(ここで、 $q_h \in F$)

例えば、 $x+y$ なら、任意の x, y に対して

$$\overline{(x, y)} q_0 B \vdash_M^* \overline{(x, y, x+y)} q_h B$$

となるような $M = (Q, \Sigma, K, q_0, F)$

※ f の定義域に制限がある場合は「部分的に計算可能」

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

8

Turing機械の例 S(x)

Turing機械 $M = (Q, \Sigma, K, q_0, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$

$\Sigma = \{B, 1\}$

$F = \{q_8\}$

$K = \{q_0 B B L q_1, q_1 1 B R q_2, q_1 B B R q_6, q_2 1 1 R q_2,$
 $q_2 B B R q_3, q_3 1 1 R q_3, q_3 B 1 L q_4, q_4 1 1 L q_4,$
 $q_4 B B L q_5, q_5 1 1 L q_5, q_5 B 1 L q_1, q_6 1 1 R q_6,$
 $q_6 B B R q_7, q_7 1 1 R q_7, q_7 B 1 R q_8 \}$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

9

Turing機械の作り方

Turing機械を合成して作る

1. 単純なTuring機械
 $B, 1, r, l, \langle a \rangle$
2. 1から基本的なTuring機械を合成
 R, L, R, T, S, C, K_n
3. 初期関数に対応するTuring機械を合成
 $Z(x), S(x), U_n^i(x_1, \dots, x_n)$
4. 原始帰納的関数関数の操作I, II

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

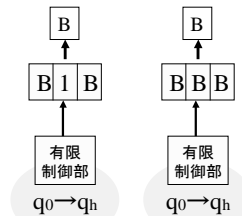
10

Turing機械 B

ヘッドが置かれてい
 ます目に空白記号Bを
 書き込む。

$B = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K,$
 $q_0, \{q_h\})$

$K = \{q_0 1 B N q_h, q_0 B B N q_h\}$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

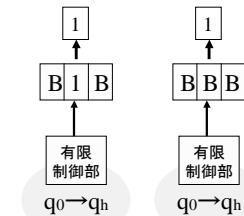
11

Turing機械 1

ヘッドが置かれてい
 ます目に1を書き込む。

$B = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K,$
 $q_0, \{q_h\})$

$K = \{q_0 1 1 N q_h, q_0 B 1 N q_h\}$



2004/11/15

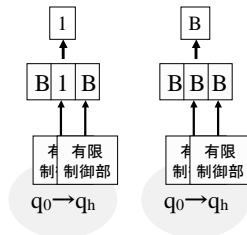
佐賀大学理工学部知能情報システム学科

12

Turing機械 r

ヘッドを1にま右へ移す。

$B = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\})$
 $K = \{q_0 1 1 R q_h, q_0 B B R q_h\}$



2004/11/15

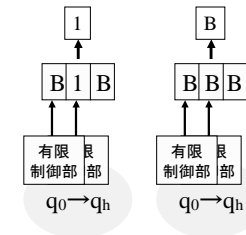
佐賀大学理工学部知能情報システム学科

13

Turing機械 l

ヘッドを1にま左へ移す。

$B = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_h\})$
 $K = \{q_0 1 1 L q_h, q_0 B B L q_h\}$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

14

Turing機械 <a>

読み取られた記号がaで

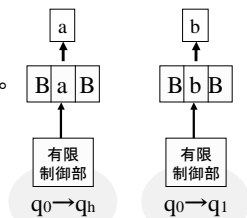
あるか否かを判定する。

aであれば q_h で停止し、
 aでなければ q_1 で停止する。

$B = (\{q_0, q_1, q_h\}, \{B, 1\}, K, q_0, \{q_1, q_h\})$

$K = \{q_0 a a N q_h, q_0 b b N q_1\}$

ここで、 $a \neq b$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

15

合成

2つのTuring機械

$M_1 = (Q_1, \Sigma, K_1, q_0^1, F_1), M_2 = (Q_2, \Sigma, K_2, q_0^2, F_2)$

$Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ と仮定できる。

(できない場合は状態の名前を付け替える)

$q \in F_1$ と $q_0^2 \in Q_2$ を同一視して得られる

以下のTuring機械

$M_1 \xrightarrow{a} M_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, K, q_0^1, F_1 \cup F_2 - \{q\})$

$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q a a N q_0^2 \mid a \in \Sigma\}$

を q における M_1 と M_2 の結合と呼ぶ。

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

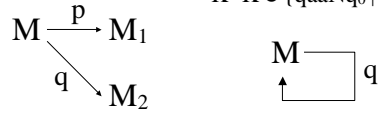
16

結合のバリエーション

Turing機械 M, M_1, M_2

$$(Q, \Sigma, K, q_0, F - \{q\})$$

$$K = K \cup \{q_a a N q_0 \mid a \in \Sigma\}$$



$$(Q \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, K, q_0, F \cup F_1 \cup F_2 - \{p, q\})$$

$$K = K \cup K_1 \cup K_2 \cup \{p_a a N q_0^1, q_b b N q_0^2 \mid a, b \in \Sigma\}$$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

17

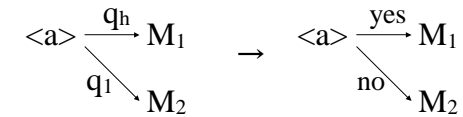
簡易表記

$F_1 = \{q\}$ であるとき、

単に $M_1 M_2$ と書ける。 $M_1 \xrightarrow{q} M_2 \rightarrow M_1 M_2$

M が $\langle a \rangle$ のとき、

q_h, q_1 を yes, no のように書ける。



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

18

Turing機械 R

ヘッドの右側にある最初の
Bを探し、そこで止まる。

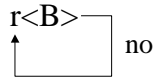
Turing機械 r と $\langle B \rangle$ から合成。

$$r = (Q_0, q_h, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$$

$$K_1 = \{q_0 B R q_h, q_0 1 R q_h\}$$

$$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0, \{p_1, p_h\})$$

$$K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_0 1 N p_1\}$$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

19

Turing機械 R つづき

$$R = (Q, \{B, 1\}, K, q_0, F)$$

$$Q = \{q_0, q_h\} \cup \{p_0, p_1, p_h\} = \{q_0, q_h, p_0, p_1, p_h\}$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_h B B N p_0, q_h 1 N p_0, p_1 1 N q_0\}$$

$$= \{q_0 B B R q_h, q_0 1 R q_h, p_0 B B N p_h, p_0 1 N p_1,$$

$$q_h B B N p_0, q_h 1 N p_0, p_1 1 N q_0\}$$

$$F = \{q_h\} \cup \{p_1, p_h\} - \{q_h\} - \{p_1\} = \{p_h\}$$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

20

Turing機械 L

ヘッドの左側にある最初の
Bを探し、そこで止まる。

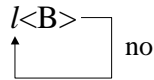
Turing機械 l と $\langle B \rangle$ から合成。

$$l = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$$

$$K_1 = \{q_0 B B L q_h, q_0 1 1 L q_h\}$$

$$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0, \{p_1, p_h\})$$

$$K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1\}$$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

21

Turing機械 L つづき

$$R = (Q, \{B, 1\}, K, q_0, F)$$

$$Q = \{q_0, q_h\} \cup \{p_0, p_1, p_h\} = \{q_0, q_h, p_0, p_1, p_h\}$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$$

$$= \{q_0 B B L q_h, q_0 1 1 L q_h, p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1, q_h B B N p_0, q_h 1 1 N p_0, p_1 1 1 N q_0\}$$

$$F = \{q_h\} \cup \{p_1, p_h\} - \{q_h\} - \{p_1\} = \{p_h\}$$

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

22

Turing機械 R

ヘッドの右側にある最初の
連続したBBを探し、
その左側のBの位置で止まる。

Turing機械 r と $\langle B \rangle$ から合成。

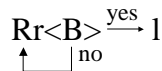
$$r = (\{q_0, q_h\}, \{B, 1\}, K_1, q_0, \{q_h\})$$

$$K_1 = \{q_0 B B R q_h, q_0 1 1 R q_h\}$$

$$\langle B \rangle = (\{p_0, p_1, p_h\}, \{B, 1\}, K_2, p_0, \{p_1, p_h\})$$

$$K_2 = \{p_0 B B N p_h, p_0 1 1 N p_1\}$$

$$R = (Q, \{B, 1\}, K, q_0, F)$$



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

23

Turing機械 T

1の連続したかたまりを1こまづつ左へ移す。

$$\underline{\sim} B W B \stackrel{*}{\vdash}_T \sim W \underline{B} B$$

ここで、

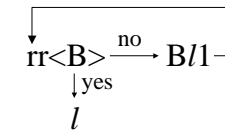
\sim : 任意の記号

W : 1の連続したかたまり

$\underline{\quad}$ (下線): ヘッドの位置

$$\underline{\sim} B W B = q_0 \sim B W B$$

$$\underline{\sim} W \underline{B} B = \sim W q_h B B$$

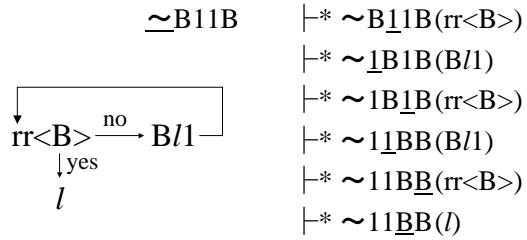


2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

24

Tの計算例



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

25

Turing機械 S

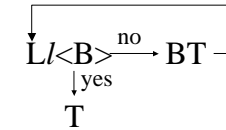
1のかたまり W_1, W_2 に対して以下の処理を行う。

$$BW_1BW_2\underline{B} \vdash_S^* BW_2\underline{B}B\dots B$$

ここで、

W_1, W_2 : 1の連続したかたまり

$\underline{\quad}$ (下線): ヘッドの位置

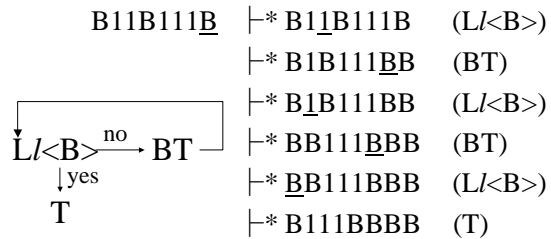


2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

26

Sの計算例



2004/11/15

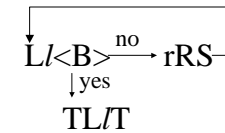
佐賀大学理工学部知能情報システム学科

27

Turing機械 C

1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n, W に対して以下の処理を行う。

$$\sim BBW_1BW_2B\dots BW_nB\underline{W} \vdash_C^* \sim W\underline{B}B\dots B$$

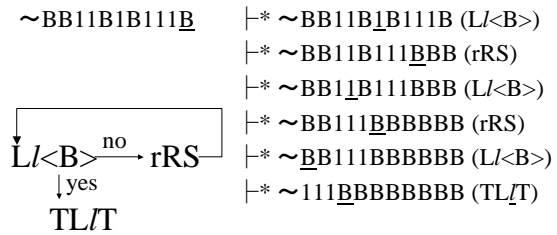


2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

28

Cの計算例



2004/11/15

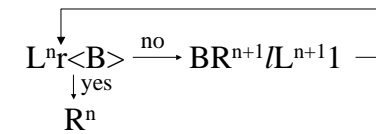
佐賀大学理工学部知能情報システム学科

29

Turing機械 K_n

n 個の1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n に対して以下の処理を行う。

$BW_1BW_2B\dots BW_nB \vdash_{K_n}^* BW_1BW_2B\dots BW_nBW_1B$

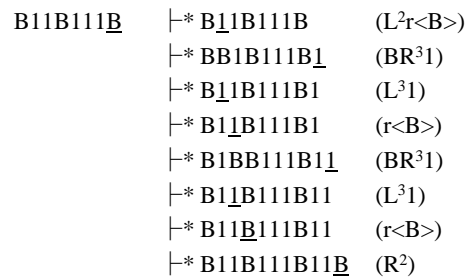


2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

30

K_n の計算例 ($n=2$ の場合)



2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

31

最後に

- ◆ ミニテスト回収
- ◆ レポート回収
- ◆ 次回
 - 帰納的関数を計算するTuring機械の合成

2004/11/15

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

32