

計算の理論 II

Turing機械の合成その2

月曜5校時
大月美佳

今日の講義

1. 前回のおさらいと残り
 1. Turing機械(TM)合成の基礎
 2. T, S, C, K_n
2. 帰納的関数を計算するTMの合成
 1. 初期関数を表すTM
 2. 合成と帰納を表すTM
 3. ミニテスト

Turing機械の作り方

Turing機械を合成して作る

1. 単純なTuring機械
 $B, l, r, l, \langle a \rangle$
2. 1から基本的なTuring機械を合成
 R, L, R, T, S, C, K_n
3. 初期関数に対応するTuring機械を合成
 $Z(x), S(x), U_n^i(x_1, \dots, x_n)$
4. 原始帰納的関数関数の操作I, II

Turing機械 R

ヘッドの右側にある最初の
Bを探し、そこで止まる。

Turing機械 r と $\langle B \rangle$ から合成。



Turing機械 L

ヘッドの左側にある最初の
Bを探し、そこで止まる。

Turing機械 l と $\langle B \rangle$ から合成。



2004/11/22

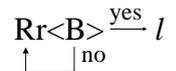
佐賀大学理工学部知情報システム学科

5

Turing機械 R

ヘッドの右側にある最初の
連続したBBを探し、
その左側のBの位置で止まる。

Turing機械 R と r , l と $\langle B \rangle$ から合成。



2004/11/22

佐賀大学理工学部知情報システム学科

6

*Turing機械 T

1の連続したかたまりを1にまづつ左へ移す。

$\underline{\sim}BWB$ $\overset{*}{T} \sim W\underline{B}B$

ここで、

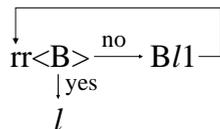
\sim : 任意の記号

W : 1の連続したかたまり

$\underline{\quad}$ (下線) : ヘッドの位置

$\underline{\sim}BWB = q_0 \sim BWB$

$\sim W\underline{B}B = \sim Wq_n BB$



2004/11/22

佐賀大学理工学部知情報システム学科

7

Tの計算例

$\underline{\sim}B11B$

* $\sim B\underline{1}1B$ ($rr\langle B \rangle$)

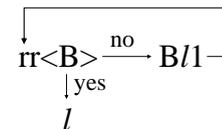
* $\sim \underline{1}B1B$ (B/l)

* $\sim 1B\underline{1}B$ ($rr\langle B \rangle$)

* $\sim 1\underline{1}BB$ (B/l)

* $\sim 11B\underline{B}$ ($rr\langle B \rangle$)

* $\sim 11B\underline{B}$ (l)



2004/11/22

佐賀大学理工学部知情報システム学科

8

*Turing機械 S

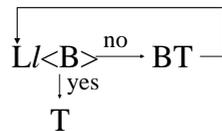
1のかたまり W_1, W_2 に対して以下の処理を行う。

$BW_1BW_2\underline{B}$ \xrightarrow{s} $BW_2\underline{BB}\dots B$

ここで、

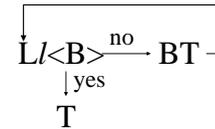
W_1, W_2 : 1の連続したかたまり

$\underline{\quad}$ (下線): ヘッドの位置



Sの計算例

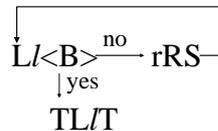
$B11B111\underline{B}$ * $B1\underline{B}111B$ (L)
 * $B1B111\underline{BB}$ (BT)
 * $B\underline{1}B111BB$ (L)
 * $BB111\underline{BBB}$ (BT)
 * $\underline{B}B111BBB$ (L)
 * $B111BB\underline{BB}$ (T)



*Turing機械 C

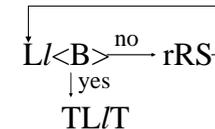
1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n, W に対して以下の処理を行う。

$\sim BBW_1BW_2B\dots BW_nB\underline{WB}$ \xrightarrow{c} $\sim W\underline{BB}\dots B$



Cの計算例

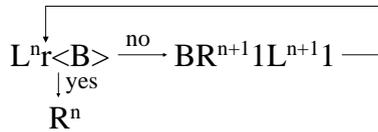
$\sim BB11B1B111\underline{B}$ * $\sim BB11B\underline{1}B111B$ (L)
 * $\sim BB11B111\underline{BBB}$ (rRS)
 * $\sim BB1\underline{1}B111BBB$ (L)
 * $\sim BB111\underline{BBBBBB}$ (rRS)
 * $\sim \underline{B}B111BBBBBB$ (L)
 * $\sim 111\underline{BBBBBBBB}$ (TL/T)



*Turing機械 K_n

n 個の1のかたまり W_1, W_2, \dots, W_n に対して
以下の処理を行う。

$BW_1BW_2B\dots BW_nB$ $\xrightarrow{*}_{kn}$ $BW_1BW_2B\dots BW_nBW_1B$



K_n の計算例 ($n=2$ の場合)

$B11B111B$	* $B11B111B$	($L^2 r \langle B \rangle$)
	* $BB1B111B1$	($BR^3 1$)
	* $B11B111B1$	($L^3 1$)
	* $B11B111B1$	($r \langle B \rangle$)
	* $B1BB111B11$	($BR^3 1$)
	* $B11B111B11$	($L^3 1$)
	* $B11B111B11$	($r \langle B \rangle$)
	* $B11B111B11B$	(R^2)

帰納的関数とTuring機械

帰納的関数を計算するTuring機械の合成

1. 初期関数を計算するTuring機械

$Z(x), S(x), U_n^i(x_1, \dots, x_n)$

2. 合成関数とTuring機械

$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_r(x_1, \dots, x_n))$

3. 原始帰納で定義される関数とTuring機械

$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ ($x_n = 0$ のとき)

$f(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$

($x_n > 0$ のとき)

初期関数のTuring機械

$Z(x)$

$r1r \quad B \underline{W} B \quad * \quad B \underline{W} B 1 \underline{B}$

$S(x)$

$K_1 1r \quad B \underline{W} B \quad * \quad B \underline{W} B W 1 \underline{B}$

$U_n^i(x_1, \dots, x_n)$

K_{n-i+1}

$BW_1B\dots BW_iB\dots BW_nB \quad * \quad BW_1B\dots BW_iB\dots BW_nBW_iB$

合成関数とTuring機械

合成関数

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_r(x_1, \dots, x_n))$$

$$r1rK_{n+1}^n L^n / B R H_1 K_{n+1}^n H_2 \dots K_{n+1}^n H_r K_{r+(r-1)n}$$

$$K_{r+(r-2)n} \dots K_r G C$$

ここで、 g, h_1, \dots, h_r を計算するTuring機械をそれぞれ G, H_1, \dots, H_r とする。

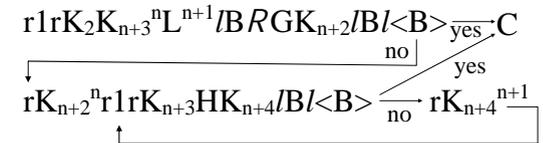
原始帰納で定義される関数と Turing機械

原始帰納

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y') = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$$

ここで、 g, h を計算するTuring機械をそれぞれ G, H とする。



原始帰納関数の例

$$x+y \text{ (plus}(x, y))$$

$$\text{plus}(x, 0) = g(x)$$

$$\text{plus}(x, y) = h(x, y-1, \text{plus}(x, y-1))$$

$$g(x) = U_1^1(x)$$

$$h(x, y, z) = S(U_3^3(x, y, z))$$

$g(x)$ と $h(x, y, z)$

$g(x)$ を計算するTuring機械を G とする。

$$g(x) = U_1^1(x) \text{ であるから、}$$

$$G \text{ は } n=1, i=1 \text{ として } K_1$$

$h(x, y, z)$ を計算するTuring機械を H とする。

$$h(x, y, z) = S(U_3^3(x, y, z)) \text{ であるから、}$$

$$U_3^3(x, y, z) \text{ に対する Turing機械 } K_1 \text{ と}$$

$$S(x) \text{ に対する Turing機械 } K_1 \text{ r を合成して、}$$

$$r1rK_4^3 L^3 / B R K_1 K_1 K_1 r C$$

合成関数Hの計算

$xByBzB$

- * $xByBzB1B$ ($r1r$) 引数と分離する準備
- * $xByBzB1BxByBzB$ (K_4^3) 引数をコピーする
- * $xByBzB1BxByBzB$ (L^3) 戻る
- * $xByBzBBBxByBzB$ (B/R) 分離の完了
- * $xByBzBBBxByBzBzB$ (K_1) H_1 適用
- * $xByBzBBBxByBzBzBzB$ (K_1) H_1 結果の取り出し
- * $xByBzBBBxByBzBzBzB(z+1)B$ (K_11r) G 適用
- * $xByBzB(z+1)B$ (C) 計算過程クリア

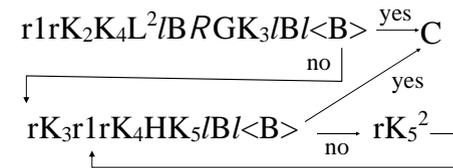
2004/11/22

佐賀大学工学部知情報システム学科

21

求めるTuring機械は

さっき定義したGとHを使用して、
 $n=1$ より、以下のように書ける。



2004/11/22

佐賀大学工学部知情報システム学科

22

最後に

- ◆ ミニテスト回収
- ◆ 次回
 - 計算可能と万能チューリング機械

2004/11/22

佐賀大学工学部知情報システム学科

23