計算の理論 II
多テープTuring機械

月曜4校時
大月美佳

今日の講義

1. 前回のおさらい
   帰納的関数を計算するTMの合成
   初期関数、合成と帰納を表すTM
2. 多テープチューリング機械
   1. 計算量を定義するための基礎
   2. ミニテスト
3. 時間があれば
   計算量のさわり

初期関数のTuring機械

$Z(x)$

$\rightarrow r1r \quad BW\underline{B} \vdash^* BWB1\underline{B}$

$S(x)$

$\rightarrow K_1 1r \quad BW\underline{B} \vdash^* BWBW1\underline{B}$

$U_n^i(x_1, \ldots, x_n)$

$\rightarrow K_{n-i+1}$

$BW_1B\ldots BW_iB\ldots BW_n\underline{B} \vdash^* BW_1B\ldots BW_iB\ldots BW_nBW_i\underline{B}$

合成関数とTuring機械

合成関数

$f(x_1, \ldots, x_n)=g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_1, \ldots, x_n))$

$\rightarrow r1rK_{n+1}{}^nL^n\mathit{lBR}H_1K_{n+1}{}^nH_2\ldots K_{n+1}{}^nH_rK_{r+(r-1)n}$
$K_{r+(r-2)n}\ldots K_rGC$

ここで、$g, h_1, \ldots, h_r$ を計算するTuring機械を
それぞれ$G, H_1, \ldots, H_r$とする。

原始帰納で定義される関数とTuring機械

原始帰納

$f(x_1, \dots, x_n, 0)=g(x_1, \dots, x_n)$

$f(x_1, \dots, x_n, y')=h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$

ここで、g, hを計算するTuring機械をそれぞれG, Hとする。

↓

$$r1rK_2K_{n+3}{}^nL^{n+1}lB\mathit{R}\,GK_{n+2}lBl<B> \xrightarrow{\text{yes}} C$$

no

$$rK_{n+2}{}^n r1rK_{n+3}HK_{n+4}lBl<B> \xrightarrow[\text{no}]{} rK_{n+4}{}^{n+1}$$

yes

原始帰納関数の例

x+y (plus(x, y))

plus(x, 0)=g(x)

plus(x, y)=h(x, y-1, plus(x, y-1))

$g(x)=U_1{}^1(x)$

$h(x, y, z)=S(U_3{}^3(x, y, z))$

g(x)とh(x, y, z)

g(x)を計算するTuring機械をGとする。

$g(x) = U_1{}^1(x)$であるから、

Gはn=1, i=1としてK_1

h(x, y, z)を計算するTuring機械をHとする。

$h(x, y, z) = S(U_3{}^3(x, y, z))$であるから、

$U_3{}^3(x, y, z)$に対するTuring機械 K_1と

S(x)に対するTuring機械$K_1$1rを合成して、

$r1rK_4{}^3L^3lB\mathit{R}K_1K_1K_11rC$

求めるTuring機械は

さっき定義したGとHを使用して、
n=1より、以下のように書ける。

$$r1rK_2K_4L^2lB\mathit{R}\,GK_3lBl<B> \xrightarrow{\text{yes}} C$$

no

$$rK_3r1rK_4HK_5lBl<B> \xrightarrow[\text{no}]{} rK_5{}^2$$

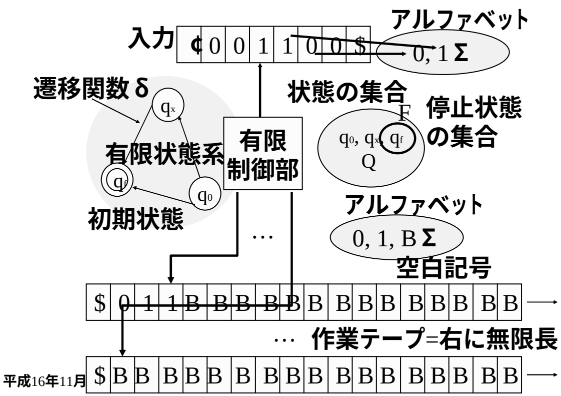
yes

多テープTuring機械の定義式

M=(Q, Σ, Γ, δ, q_0, B, F)

- Q: 状態の有限集合
- Σ: 入力アルファベット
- Γ: 作業用テープのアルファベット
- q_0: 初期状態$q_0 \in Q$
- B: 空白記号$B \in \Gamma$
- F: 最終状態の集合$F \subseteq Q$
- δ: $Q \times (\Sigma \cup \{¢, \$\}) \times (\Gamma \cup \{\$\})^k \times Q \times (\Gamma \cup \{\$\})^k \times \{L, R, N\}^{k+1}$の部分集合

多テープTuring機械の模式図



多テープTuring機械の基本的動作

状態pで入力テープのヘッドがa, i番目の作業用テープのヘッドがX_iを読んだとき、

(1) 作業用テープのヘッドのある場所をY_iに書き換える。

(2) 入力テープのヘッドをD_0、i番目の作業用テープのヘッドを方向D_iに移動する。

(m, $D_0, D_1, \ldots, D_1 \in \{L, R, N\}$)

(3) 次の状態qに遷移する。

→遷移関数：δ

遷移δ

$(p, a, X_1, \ldots, X_k, q, Y_1, \ldots, Y_k, D_0, \ldots, D_k) \in \delta$

- k: 作業用テープの数
- p: 前状態
- a: 入力テープのヘッドの位置の記号
  - a= ¢ならばD_0=RまたはN
  - a=$ならば$D_0$=LまたはN
- $X_1, \ldots, X_k$: 作業テープのヘッドの位置の記号
  - X_i=$ならば$Y_i$=$であり、D_i=RまたはN
  - Y_i=$であるのは$X_i$=$のときに限る
- q: 次状態
- $Y_1, \ldots, Y_k$: 作業テープのヘッドの位置に書き込む記号
- D_0: 入力テープのヘッドの移動方向
- $D_1, \ldots, D_k$: 作業テープのヘッドの移動方向

遷移δ(u)

$\delta(u)=\{v \in K_2 \mid (u, v) \in \delta\}$

$K_1 = Q \times (\Sigma \cup \{¢, \$\}) \times (\Gamma \cup \{\$\})^k$

$K_2 = Q \times (\Gamma \cup \{\$\})^k \times \{L, R, N\}^{k+1}$

$u=(p, a, X_1, \ldots, X_k) \in K_1$

$v=(q, Y_1, \ldots, Y_k, D_0, \ldots, D_k) \in K_2$

決定性(deterministic) Turing**機械**(DTM)

各$u \in K_1$**について**$|\delta(u)| \leqq 1$**である。**

計算状況の定義

$C(x)$: $(q, (h, ¢x\$), (h_1, \xi_1), \ldots, (h_k, \xi_k))$

q: **現在の状態**

h: **入力テープのヘッドの位置** $(0 \leqq h \leqq |x|+1)$

$¢x\$$: **入力テープの記号列**

$x=x_0x_1 \ldots x_{n+1}$ **のとき**

$(h, ¢x\$)= x_0x_1 \ldots \underline{x_h} \ldots x_{n+1}$

h_i: **作業用テープのヘッドの位置**

ξ_i: **作業用テープの記号列**

$(h, \xi)= \xi(0)\xi(1) \ldots \underline{\xi(h)} \ldots \xi(n) \ldots$

ξ: **写像**$N \rightarrow \Gamma \cup \{\$\}$

動作 $\vdash_M$, $\vdash$

$C(x)$: $(p, (h, ¢x\$), (h_1, \xi_1), \ldots, (h_k, \xi_k))$**が**

$x_h=a$ $(¢x\$=x_0x_1 \ldots x_{n+1},\ x_i \in \Sigma \cup \{¢, \$\})$

$\xi_i(h_i)= X_i \qquad (1 \leqq i \leqq k)$

を満たしているとき、遷移

$(q, Y_1, \ldots, Y_k, D_0, \ldots, D_k) \in \delta(p, a, X_1, \ldots, X_k)$

によって次のように定義される計算状態$D(x)$

に移ることができる。

動作 $\vdash_M$, $\vdash$つづき

$D(x)$:

$(q, (h+\tilde{D}_0, ¢x\$), (h_1+\tilde{D}_1, \tilde{\xi}_1), \ldots, (h_k+\tilde{D}_k, \tilde{\xi}_k))$

$D_i=R$**のとき、**$\tilde{D}_i=1$,

$D_i=L$**のとき、**$\tilde{D}_i=-1$,

$D_i=N$**のとき、**$\tilde{D}_i=0$, $(1 \leqq i \leqq k)$

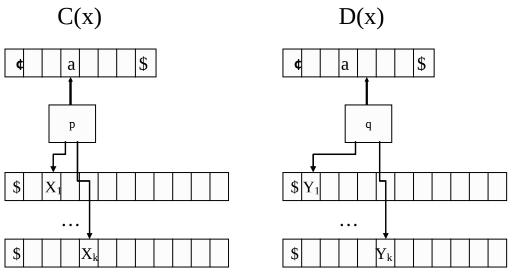
$\tilde{\xi}_i(h_i)= Y_i$, $\tilde{\xi}_i(n)= n$ $(n \neq h_i)$ $(1 \leqq i \leqq k)$

ただし、$0 \leqq h+ \tilde{D}_0 \leqq |x|+1$**および、**$0 \leqq h+ \tilde{D}_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$

が成り立つときに限る。

→$C(x) \vdash_M D(x)$**または単に**$C(x) \vdash D(x)$**と書く**

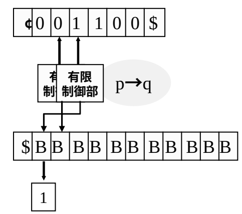
動作の模式図



動作と計算状況の具体例

$(p, 0, 1, q, R, R)$

$(1, R, R, q) \in \delta(p, 0)$



$(p,\ ¢0\underline{0}1100\$,\ \$\underline{B}B\ldots) \vdash (q,\ ¢00\underline{1}100\$,\ \$1\underline{B}\ldots)$

停止、 $\vdash^*_M$, $\vdash^*$

- Mが計算状況C(x)で停止
  計算状況C(x)に対して、$C(x) \vdash D(x)$となる
  計算状況D(x)が存在しない。
- $\vdash^*_M$, $\vdash^*$
  関係 $\vdash_M$ の反射的推移的閉包

計算、 $\vdash^t_M$

- 計算
  計算状況の列
  $D_0(x) \vdash D_1(x) \ldots \vdash D_t(x)$
  t: ステップ数
- $D_0(x) \vdash^t_M D_t(x)$
  $D_0(x)$から$D_t(x)$へtステップで到達可能

受理、受理計算

- Mがxを受理(accept)する
  入力xに対して、
  xを入力とするMの初期計算状況$C_0(x)$から、
  ある受理計算状況D(x)に到達するMの計算が
  少なくとも1つある
- 受理計算(accepting computation)
  その計算
- Mがxを受理して停止
  D(x)が停止している計算状況

L(M)

- L(M)
  Mによって受理される記号列の集合
  $L(M)=\{x\in\Sigma^* \mid M$はxを受理する$\}$
- MはL(M)を受理する

Turing機械の例

- 1テープTuring機械 (DTM) M
  $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$
  $Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
  $\Sigma=\{0, 1, \#\}$,
  $\Gamma=\{B, 0, 1\}$,
  $F=\{q_3\}$, δは右表

q	a	X	δ(q, a, X)
q_0	0	B	$(q_0, 0, R, R)$
q_0	1	B	$(q_0, 1, R, R)$
q_0	#	B	(q_1, B, N, L)
q_1	#	0	$(q_1, 0, N, L)$
q_1	#	1	$(q_1, 1, N, L)$
q_1	#	$	$(q_2, \$, R, R)$
q_2	0	0	$(q_2, 0, R, R)$
q_2	1	1	$(q_2, 1, R, R)$
q_2	$	B	(q_3, B, N, N)

計算の例

$(q_0,\ ¢\underline{1}0\#10\$,\ \$\underline{B}B\ldots)$

ステップ数

- $time_M(x)$

  xを受理するMの最小ステップ。

  $time_M(x)=\min\{ t \mid$ ある受理計算状態D(x)に対して$C_0(x) \vdash^t_M D(x)\}$

  $time_M(x) \geqq |x|$

  入力ヘッドは全ての入力記号を読んで右エンドマーカに到達するから。

ます目の量

- space(x)

  xを受理するMの計算

  $\alpha : C_0(x) \vdash C_1(x) \dots \vdash C_t(x)$

  $space(\alpha)=\max\{h_i^{(j)} \mid 0 \leqq j \leqq t, 0 \leqq i \leqq k \}$

  ただし、$C_j(x): (p_j , (h^{(j)}, ¢x\$), (h_1^{(j)}, \xi_1^{(j)}), \dots, (h_k^{(j)}, \xi_k^{(j)}))$ $(0 \leqq j \leqq t)$

  $space_M(x)=\min\{ space(\alpha) \mid$ ある受理計算状態D(x)に対して$\alpha : C_0(x) \vdash^*_M D(x)\}$

  $space_M(x) \geqq 1$

- Mがxを領域sで受理

  ある自然数sに対して、$s \geqq space_M(x)$

ステップ数、ます目の量の例

- 先の1テープDTM

  x=w#wに対して、

  $space_M(x)=|w|+1$

  $time_M(x)=3|w|+3$

最後に

- ミニテスト
  - ミニテストを提出してから帰ること
- 次回は、

  計算量