

計算の理論 II

計算量

月曜5校時
大月美佳

今日の講義

1. 計算量
 1. space(x), time(x)
 2. O記号
 3. カウンタ

多テープTuring機械の例

- ◆ 1テープTuring機械 (DTM) M
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, B, F)$
 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
 $\Sigma = \{0, 1, \#\}$,
 $\Gamma = \{B, 0, 1\}$,
 $F = \{q_3\}$, は右表

q	a	X	(q, a, X)
q_0	0	B	$(q_0, 0, R, R)$
q_0	1	B	$(q_0, 1, R, R)$
q_0	#	B	(q_1, B, N, L)
q_1	#	0	$(q_1, 0, N, L)$
q_1	#	1	$(q_1, 1, N, L)$
q_1	#	\$	$(q_2, \$, R, R)$
q_2	0	0	$(q_2, 0, R, R)$
q_2	1	1	$(q_2, 1, R, R)$
q_2	\$	B	(q_3, B, N, N)

計算の例

$(q_0, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ \underline{B} B \dots)$ $(q_0, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ \underline{1} B \dots)$
 $(q_0, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 \underline{0} B \dots)$ $(q_0, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 0 \underline{B} \dots)$
 $(q_1, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 \underline{0} B \dots)$ $(q_1, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ \underline{1} 0 B \dots)$
 $(q_1, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 \underline{0} B \dots)$ $(q_1, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ \underline{1} 0 B \dots)$
 $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ \underline{1} 0 B \dots)$ $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 \underline{0} B \dots)$
 $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 \underline{0} B \dots)$ $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 0 \underline{B} \dots)$
 $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 0 \underline{B} \dots)$ $(q_2, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 0 \underline{B} \dots)$
 $(q_3, \# \underline{1} 0 \# 1 0 \$, \$ 1 0 \underline{B} \dots)$

2テープNTM

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$
 $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$
 $\Sigma = \{0, 1, \#\}$
 $\Gamma = \{B, 0, 1\}$
 $F = \{q_5\}$
 は右表

q	a	X ₁	X ₂	(q, a, X ₁ , X ₂)
q ₀	0	B	B	{(q ₀ , 0, B, R, R, N)}
q ₀	1	B	B	{(q ₀ , 1, B, R, R, N)}
q ₀	#	B	B	{(q ₁ , B, B, L, N, N), (q ₂ , B, B, R, N, N)}
q ₁	0	B	B	{(q ₁ , B, B, L, N, N)}
q ₁	1	B	B	{(q ₁ , B, B, L, N, N)}
q ₁	ε	B	B	{(q ₀ , B, B, R, N, N)}
q ₂	0	B	B	{(q ₂ , B, 0, R, N, R)}
q ₂	1	B	B	{(q ₂ , B, 1, R, N, R)}
q ₂	\$	B	B	{(q ₃ , B, B, L, N, N), (q ₄ , B, B, R, N, N)}
q ₃	0	B	B	{(q ₃ , B, B, L, N, N)}
q ₃	1	B	B	{(q ₃ , B, B, L, N, N)}
q ₃	#	B	B	{(q ₂ , B, B, R, N, N)}
q ₄	\$	0	0	{(q ₄ , 0, 0, N, L, L)}
q ₄	\$	1	1	{(q ₄ , 1, 1, N, L, L)}
q ₄	\$	\$	\$	{(q ₅ , \$, \$, N, N, N)}

2004/12/6

9

2テープNTMの計算

$L(M) = \{u\#v \mid u, v \in \{0, 1\}^*, m, n \in \mathbb{N}, u^m = v^n\}$

入力01#0101に対して

$(u, v, m, n) = \{(0101, 0101, 2, 1), (01010101, 01010101, 4, 2), \dots\}$

2004/12/6

佐賀大学理工学部知情報システム学科

10

O記号

定義

関数 $f(n)$, $g(n)$ に対して、
 ある定数 $c > 0$ と整数 $n_0 \geq 0$ が存在して、
 全ての $n \geq n_0$ に対して $f(n) \leq cg(n)$ となるとき、
 $f(n) = O(g(n))$
 と書く。

2004/12/6

佐賀大学理工学部知情報システム学科

11

O記号の例

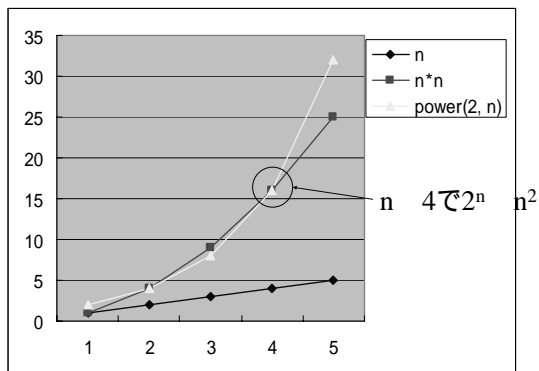
- ◆ n
 - $O(\log n)$ ではない, $O(\sqrt{n})$ ではない, $O(n)$, $O(n^2)$, ...
- ◆ 2^n
 - $O(n)$ ではない, $O(n^2)$ ではない, $O(2^n)$, ...
- ◆ $\log_2 n$
 - $O(\sqrt{n})$ ではない, $O(\log n)$, $O(n)$, ...
- ◆ $\log_7 2n + 2$: $O(\log n)$, ...

2004/12/6

佐賀大学理工学部知情報システム学科

12

$O(2^n)$ $O(n^2)$ $O(n)$

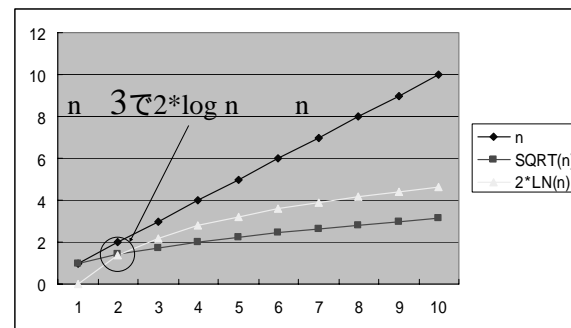


2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

13

$O(n)$ $O(\log n)$ $O(\sqrt{n})$



2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

14

カウンタ

作業用テープをカウンタとして使用

2進数 $x = b_1 \dots b_m$ $y = b_m \dots b_1 B B \dots$

1加える動作

(初期状態 p , 終了状態 q) $(p, \text{add1}, q)$

1引く動作動作

(初期状態 p , 終了状態 $q(x > 0), r(x = 0)$)

$(p, \text{sub1}, q, r)$

2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

15

$(p, \text{add1}, q)$

s_1	X	s_2	Y	D
p	\$	p_1	\$	R
p_1	0/B	p_2	1/1	L
p_1	1	p_1	0	R
p_2	0/1	p_2	0/1	L
p_2	\$	q	\$	N

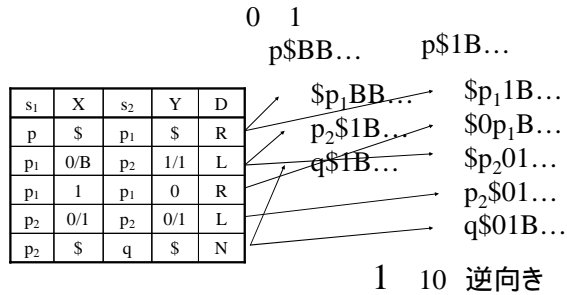
足す ←
戻る →

2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

16

(p, add1, q):動作

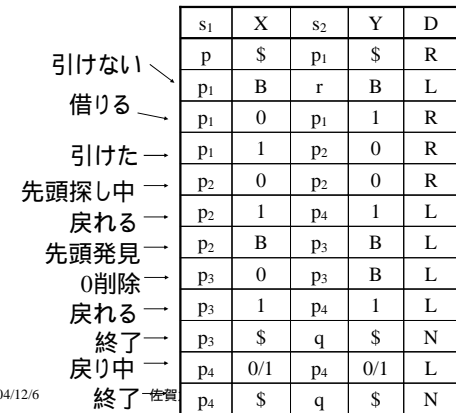


2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

17

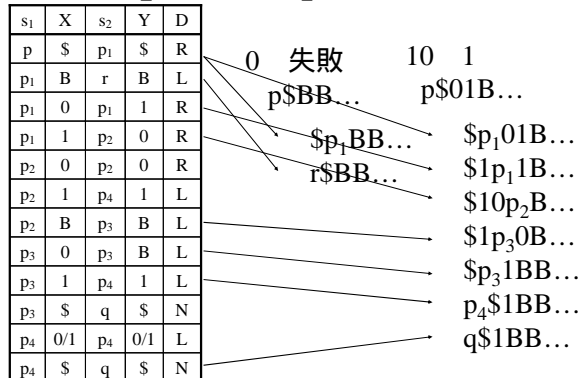
(p, sub1, q, r)



2004/12/6

18

(p, sub1, q, r):動作



2004/12/6

佐賀大学理工学部知能情報システム学科

19

カウンタ使用時の領域量

$L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ を領域 $O(\log_2 n)$ で受理する
DTM M

$C_1 = 1; C_2 = 1;$

1: 入力ヘッドを $x_1 \dots x_2 \#$ の C_1 番目に持っていき、 C_1 番目の記号 A を記憶する;

入力ヘッドを # まで右に動かす;

$y_1 \dots y_m$ の C_2 番目に持っていき、 C_2 番目の記号 B を記憶する;

もし $A=B$ ならば $C_1 = C_1 + 1; C_2 = C_2 + 1$ とし、ラベル 1 に戻る。

それ以外でもし $A=\#$ かつ $B=\$$ ならば受理、

それ以外是非受理

2004/12/6


佐賀大学理工学部知能情報システム学科

20



DTM Mの構成例

- ◆ 作業用テープ4本
 - 第1テープにカウンタ C_1
 - 第2テープにカウンタ C_2
 - 第3テープにAの文字保存
 - 第4テープにBの文字保存



最後に

- ◆ ミニテストを提出して帰ること
- ◆ 次回は
領域量と時間量