計算の理論 II
NP完全

月曜5校時
大月美佳

今日の講義内容

1. 講義の前に
   アンケートについて
2. 前回の復習
   P, NP→問題→還元可能→P完全、NP完全
3. NP完全な言語
4. 回収
   1. アンケート
   2. レポート

P, NP

- P
  決定性Turing機械によって多項式時間で受理される言語
- NP
  非決定性Turing機械によって多項式時間で受理される言語
- P≠NP
  まだ証明されていない

Pの定義

$$P = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{DTIME}(n^k)$$

$$p(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

$a_m > 0$のとき、

kを十分大きくとる$(m << k)$と

$$p(n) = O(n^k)$$

$$\therefore \mathrm{DTIME}(p(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(n^k)$$

NPの定義

$$NP = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{NTIME}(n^k)$$

Pと同様に

$$p(n) = O(n^k)$$

$$\therefore \mathrm{NTIME}(p(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(n^k)$$

NPであるということ

＝NTMで多項式時間で受理

→現実世界では：

取りうるすべての組み合わせに対して総当り(しらみつぶし)

ひとつの要素の処理が多項式時間で受理

問題

- 写像A: $\Sigma^* \to \{0, 1\}$

  アルファベットΣで表現された

  真偽問題(yes/no problem)、問題

  Σ^*の部分集合$\{x \in \Sigma^* | A(x)=1\}$

  →AはΣ^*上の言語
- 写像Aの複雑さ

  =言語$\{x \in \Sigma^* | A(x)=1\}$を受理するTMの計算量

還元可能性

- 計算可能関数 f: $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$

  言語 $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$

  それぞれTM M_1, M_2で受理

  すべての$x \in \Sigma_1^*$に対して

  $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$

  となるとき、L_1をL_2に還元(reduce)できるという。
- $x \in L_1$ の判定

  M_1 を走らせるかわりに$f(x)$がM_2 で受理できるか調べる。

変換機

変換機(transducer)

- 1本の入力テープ(読みとりのみ)
- k本の作業テープ(読み書き可)
- 1本の書き出し専用テープ(左方向に動けない)

対数領域計算可能(log space computable)

- fが領域$\log_2 n$で計算可能

多項式時間計算可能(polynomial time computable)

- ある多項式p(n)とfが時間p(n)で計算可能

還元可能

対数領域還元可能 (log space reducible)

- $L_1 \leqq^{\log} L_2$ (via f)

多項式時間還元可能 (polynomial time reducible)

- $L_1 \leqq^{p} L_2$ (via f)

$C \leqq^{\log} L_0$, $C \leqq^{p} L_0$

- 言語のクラスCがすべてのLについて
- $L \leqq^{\log} L_0$, $L \leqq^{p} L_0$

NP完全、PSPACE完全、P完全

$\leqq^{\log}$ 完全、$\leqq^{p}$ 完全

1. $L_0 \in C$
2. すべての$L \in C$に対して$L \leqq^{\log} L_0$, $L \leqq^{p} L_0$となる

NP, P, PSPACEに対して

それぞれ$\leqq^{\log}$ 完全(または$\leqq^{p}$ 完全)であるとき

- NP完全(NP-complete)
- PSPACE完全(PSPACE-complete)
- P完全(P-complete)

NP完全の示し方

ある言語LがNP完全であることを言うには

1. LがNPであることを示す
2. $L_0 \in$ NPな言語L_0がLに還元可能であることを示す

NP完全な言語

- 充足可能性問題(SAT)
- 和積標準形(CNF)
- 3和積標準形(3SAT)
- 頂点被覆問題(VERTEX COVER)

充足可能性問題

ある論理式が真となるような、変数への値の割当が存在するか、を調べる問題

例：(x1 + x2)・x1

(x1, x2) = (1, 0) or (1, 1)

のときに上の式は真

論理式の符号化

以下の文脈自由文法$G_{form}=(N, \Sigma, P, E)$で生成

$N = \{ V, E \}$

$\Sigma = \{x, 0, 1, +, \cdot, \neg,), (\}$

$P = \{ E \to V, V | (E+E) | (E \cdot E) | \neg E,$
$V \to V0 | V1 | x1 \}$

例：((x1+x10)・x1)

SAT∈NP

SATを多項式時間で受理するNTM M

論理式をFとする

1. MはFに現れている相異なる変数を作業用テープに書き出す。
2. 次に非決定的に動いてこの変数に0または1を割当てた表を作業テープに書く。
3. この表をみてFの変数に0または1を代入しFの値を評価する。

Lに還元可能

(概念)

- 任意の計算をする言語L_0が対数領域(または多項式時間)でLに変換できる(還元可能な)ことを示せばよい。

充足可能性問題(SAT)の場合

- 言語L_0を論理式の形式で表現でき、かつ
- 受理状態でその論理式が充足することを示す。

和積標準形(CNF)

論理式は、

$$(u_1+\dots+u_{n_1})\cdot(v_1+\dots+v_{n_2})\cdot\dots\cdot(w_1+\dots+w_{n_l})$$

の形をしているとき、和積標準形(conjunction normal form)であるという。

CNF={ F∈SAT| Fは和積標準形 }

3和積標準形(3SAT)

論理式は、

$$(u_1+\dots+u_k)\cdot(v_1+\dots+v_k)\cdot\dots\cdot(w_1+\dots+w_k)$$

の形をしているとき、k和積標準形であるという。

3SAT={ F∈SAT| Fは3和積標準形 }

証明済み問題に基づく証明

NP完全性

- すでに証明された問題へ対数領域(または多項式時間)還元することで証明可能

例:

- 頂点被覆問題(VERTEX COVER)
  - 3SATへ対数領域還元可能
- ENSENBLE COMPUTATION
  - VERTEX COVERへ対数領域還元可能

その他のNP完全な問題

最後に

- レポート提出
  - 今日提出不可能な人→出席を申告
- 次週(1/24)休講
  - 補講日未定
  - 次回1/31(月)